The processes of industrialization, reindustrialization and new industrialization differ not only in the content and mechanisms of implementation, but also in the set of resources required for their application. New industrialization as a process of quantitative and qualitative changes in the economy is based on a complex of resources. These resources are necessary, on the one hand, for the modernization of traditional industries, and on the other hand, for the formation of promising economic activities and industries. Keeping a balance between the resources used to achieve the goals of modernization and innovative development in order to achieve the goals of modernization and innovative development is one of the tasks of a methodological nature and requires the development of appropriate theoretical approaches and models. At the same time, the second most important task is the application of such theories and concepts that will provide a solution to the problems associated with the identification, assessment and description of the parametric characteristics and functions of resources in the system of industrial development of the domestic economy. To solve these problems, the article highlights the features of new industrialization; its differences from such phenomena as industrialization, deindustrialization and reindustrialization. It is substantiated that the use of the resource concept as a methodological basis for new industrialization will make it possible to determine the following: to draw up a typology of the resources of new industrialization; identify criteria for strategic and complementary resources of new industrialization; to identify the subjects of relations in the resource allocation system, as well as their specific functions. The article concludes that modernization processes are provided mainly by massive resources and complementary capabilities and competencies, while the processes of innovative and technological development within the framework of the new industrialization of the economy presuppose the presence of strategic, unique resources and competencies.
Keywords: new industrialization, resource approach, modernization, innovation and technological development, parameters, functions.
JEL classification: O14, O25, J24.

Manuscript received 17.03.2021

КРАТКОСРОЧНОЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ АВТОРЕГРЕССИЯМИ[1]

С.Г. Светуньков

DOI: 10.33293/1609-1442-2021-4(95)-35-48

Одним из направлений, которое способно расширить инструментальную базу моделирования экономики, является комплекснозначная экономика – раздел экономико-математического моделирования, посвященный использованию моделей и методов теории функции комплексного переменного в экономике. В статье рассматривается возможность краткосрочного экономического прогнозирования с помощью моделей авторегрессий комплексных переменных. Приводится классификация возможных модификаций комплекснозначных авторегрессионных моделей. Показываются основные свойства каждого из классов этих моделей. Одна из разновидностей этих комплекснозначных моделей использует текущую и прошлые ошибки аппроксимации, а это значит, что она может быть сравнима с широко распространенной на практике моделью авторегрессии действительных переменных *ARIMA*(*p, d, q*). В статье осуществляется такое сравнение как на теоретическом уровне, так и на практическом примере.
Ключевые слова: комплекснозначная экономика, краткосрочное экономическое прогнозирование, авторегрессии.
Классификация JEL: C22, C29, C53.

Светуньков Сергей Геннадьевич, доктор экономических наук, профессор, профессор Высшей школы бизнес-инжиниринга Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия; sergey@svetunkov.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-010-00610\19 «Теория, методы и методики прогнозирования экономического развития авторегрессионными моделями комплексных переменных».

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании многих экономических процессов использование моделей и методов теории функций комплексного переменного оказывается не хуже, а в некоторых случаях лучше моделей действительных переменных. Так, например, при моделировании производственных процессов производственные функции комплексных переменных более подробно описывают эти процессы и демонстрируют в ряде случаев большую точность, чем производственные функции действительных переменных (Светуньков, 2019). Например, рассматривая такие результаты производства, как валовая прибыль G и валовые издержки C в форме комплексной переменной $C + iG$, можно построить такую комплекснозначную степенную производственную функцию:

$$C + iG = (a_0 + ia_1)(L + iK)^{(b_0 + ib_1)}. \quad (1)$$

Здесь L – затраты труда, а K – затраты капитала.

Можно заметить, что эта модель производственной функции описывает влияние затрат каждого ресурса на валовые издержки и на валовую прибыль по отдельности в зависимости от того, какие значения принимают показатели степени b_0 и b_1. Если они положительны, то с увеличением затрат трудовых ресурсов L при постоянстве капитальных ресурсов K будет моделироваться рост издержек C и снижение валовой прибыли G. А при фиксированных затратах на труд с ростом капитала K будут моделироваться рост валовой прибыли G и некоторое снижение издержек производства C. Именно такие процессы происходят в реальной экономике, и данная модель адекватно их описывает.

Но не только в этом отличительные особенности комплекснозначной производственной функции от производственных функций действительных переменных. Полярный угол комплексного производственного результата будет равен

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{G}{C}. \quad (2)$$

Он характеризует рентабельность производства.

Полярный угол комплексного ресурса также имеет яркий экономический смысл, поскольку он равен

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{K}{L}. \quad (3)$$

Как видно, он характеризует капиталовооруженность труда.

Следовательно, степенная комплекснозначная производственная функция (1) с положительными показателями степени моделирует ситуации, когда с ростом капиталовооруженности труда растет и рентабельность производства.

Мы не будем в данной статье останавливаться на многих замечательных свойствах производственных функций комплексных переменных. Линейные, степенные, логарифмические и производственные функций комплексных переменных других форм тщательно изучены и описаны в соответствующих монографиях (Svetunkov, 2012; Светуньков С.Г., Светуньков И.С., 2019). При этом следует иметь в виду, что комплексные переменные в экономике следует применять в том случае, когда действительная и мнимая части комплексной переменной отражают разные стороны одного и того же процесса, сведены к единому размеру и соизмеримы по масштабу. Иначе невозможно будет вычислить ни модуль комплексной переменной, ни ее полярный угол.

В каких случаях возможно использование в дополнение к моделям действительных переменных моделей комплексных переменных помимо производственных функций? В том случае, когда желательно рассматривать одновременно не одну переменную, а две экономические переменные, которые описывают разные стороны одного и того же экономического явления. Подобных переменных, которые отражают разные стороны одного и того же экономического процесса, довольно много – ведь очень многие экономические показатели, используемые в моделировании, являют собой результаты агрегирования нескольких составляющих, довольно часто сводимых к двум группам: АУП и основной персонал предприятий, основные и оборотные фонды, активная и пассивная части основных фондов, цена товара и объем его продаж, цены на сопутствующие товары и т.п.

Многие из этих экономических показателей отражают экономическую динамику; их прогнозирование является важной экономической задачей. Представляя эти пары экономических показателей в комплексной форме, появляется возможность использовать модели ТФКП для решения задач экономического прогнозирования, в частности, применительно к задачам краткосрочного экономического прогнозирования.

Общей моделью краткосрочного прогнозирования считается модель авторегрессии, поскольку широко используемая на практике модель экспоненциального сглаживания представляет частный случай модели авторегрессии.

В общем случае модель комплексной авторегрессии может быть записана так:

$$y_{1t} + iy_{2t} = \sum_{\tau=1}^{p} F\left(y_{1(t-\tau)} + iy_{2(t-\tau)}\right) + (\varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t}). \quad (4)$$

Здесь y_{1t} и y_{2t} – прогнозируемые на момент времени t действительные переменные; i – мнимая единица, о которой известно, что $i^2 = i - 1$; F – некоторая комплекснозначная функция; τ – лаг авторегрессии; p – порядок авторегрессии; ε_{1t} и ε_{2t} – ошибки аппроксимации первой и второй переменных в момент времени t.

В зависимости от вида комплекснозначной функции F комплексные авторегрессии (4) могут быть линейными и нелинейными. Нелинейные авторегрессионные модели действительных переменных крайне редки как в практическом применении, так и в теоретических исследованиях. Поэтому и в нашем исследовании мы сконцентрируем наше внимание на линейных авторегрессиях и в дальнейшем будем понимать под комплексными авторегрессиями (*complex autoregression*) линейные формы модели (4) и обозначать эти модели как $CAR(p)$.

Таким образом, рассматриваемые комплекснозначные авторегрессионные модели $CAR(p)$ в общем виде будут представлены в такой форме:

$$y_{1t} + iy_{2t} = (b_0 + ib_1) + \\ + \sum_{\tau=1}^{p} (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{1(t-\tau)} + iy_{2(t-\tau)}) + (\varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t}), \quad (5)$$

где b_0 и b_1 – коэффициенты (свободные члены), отражающие начальное значение комплексного ряда; $a_{0\tau}$ и $a_{1\tau}$ – коэффициенты пропорциональности.

Из (5) легко заметить, что модель $CAR(p)$ содержит $2(p + 1)$ неизвестных коэффициентов. Обычно при представлении моделей авторегрессии опускают свободные члены, поскольку от них можно избавиться, осуществив центрирование исходных переменных относительно их средних арифметических. Поэтому и мы в дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты b_0 и b_1 равны нулю.

Моделируемые одномерные ряды также могут быть представлены в виде пары – сам ряд, которые следует отнести к действительной части, и его дополнительная характеристика, относимая к мнимой части, которой могут выступать время наблюдения показателя или ошибка аппроксимации этого ряда используемой моделью авторегрессии.

С учетом этого комплексная переменная $(y_{1t} + iy_{2t})$ в модели комплексной авторегрессии может быть представлена в трех основных формах в зависимости от вида второй переменной:

1) комплексная авторегрессия как частный случай векторной авторегрессии – это и есть модели $CAR(p)$;

2) временнáя комплексная авторегрессия $CTAR(p)$, когда $y_{2t} = t$. В этом случае комплексная переменная принимает вид $(y_{1t} + it)$;

3) комплексная авторегрессия с ошибкой $CARE(p)$, когда $y_{2t} = \varepsilon_t$. Тогда комплексная переменная модели (4) будет записана так: $(y_{1t} + \varepsilon_{it})$.

Рассмотрим эти три типа моделей авторегрессий комплексных переменных.

1. ВЕКТОРНАЯ И КОМПЛЕКСНАЯ АВТОРЕГРЕССИИ

С ростом возможностей современной вычислительной техники ученые способны решать задачи такой сложности, которые еще недавно казались неразрешимыми. К числу таких задач относятся и модели векторной авторегрессии $VAR(p)$.

В общем виде модель векторной авторегрессии можно записать так:

$$\hat{Y}_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \ldots + A_{t-1} Y_1. \qquad (6)$$

Здесь Y_t – k-мерный вектор переменных; A_0 – k-мерный вектор коэффициентов; $A\tau$ – $k \times k$-мерные постоянные вещественные матрицы.

Например, в двумерном случае $VAR(4)$ примет вид:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Комплексная авторегрессия первого порядка $CAR(4)$ также может быть представлена как векторная авторегрессия следующего вида:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} & -a_{11} \\ a_{11} & a_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Легко заметить, что в $VAR(4)$ необходимо оценить четыре неизвестных коэффициента, а в модели $CAR(4)$ – всего два коэффициента. С одной стороны, это говорит о том, что, являясь частным случаем модели $VAR(4)$, модель $CAR(4)$ будет менее точной, а с другой стороны, эта модель – более простая и в некоторых случаях это является преимуществом.

$VAR(4)$ в трехмерном случае будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Аналогичная ей модель $CAR(4)$ для трехмерного случая будет записана так:

$$\begin{cases} \hat{y}_{1t} + i\hat{y}_{2t} = (a_{11} + ia_{12})(y_{1t-1} + iy_{2t-1}) + \\ \qquad + (b_{11} + ib_{12}) y_{3t-1}; \\ \hat{y}_{3t} = a_{31} y_{1t-1} + a_{32} y_{2t-1} + a_{33} y_{3t-1}, \end{cases}$$

или в векторной форме

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & b_{11} \\ a_{12} & a_{11} & b_{12} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Для использования модели (9) надо вычислить девять неизвестных коэффициентов, а для использования модели (10) – семь коэффициентов. Вновь мы видим, что модель $CAR(4)$ проще модели $VAR(4)$.

Если прогнозист хочет использовать $VAR(4)$ для четырехмерного случая, ему необходимо найти 16 неизвестных коэффициентов, поскольку модель будет такой:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \\ y_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \\ y_{4t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \varepsilon_{4t} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

А вот модель $CAR(4)$ для этого случая значительно более экономна, так как оценить необходимо восемь неизвестных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} + iy_{2t} \\ y_{3t} + iy_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + ia_{12} & b_{11} + ib_{12} \\ a_{21} + ia_{22} & b_{21} + ib_{22} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} y_{1t-1} + iy_{2t-1} \\ y_{3t-1} + iy_{4t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} + i\varepsilon_{4t} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Легко убедиться в том, что $VAR(5)$ для четырехмерного случая будет содержать 32 неизвестных коэффициентов, а соответствующая ей модель CAR(5) – 16 коэффициентов, т.е. в два раза меньше. Это значит, что модель *CAR*(*p*), являясь частным случаем модели *VAR*(*p*), может оказаться ее достойной альтернативой, поскольку необходимость оценивания значительно меньшего количества коэффициентов является важным преимуществом комплексной авторегрессии перед векторной. Это подтвердили наши сравнительные исследования моделей *VAR*(4) и *CAR*(4). Они показали, что на больших выборках модель *VAR*(4) описывает и прогнозирует эти выборки лучше, а на малых выборках комплексная авторегрессия, обладая большим числом степеней свободы, чем векторная авторегрессия, и описывает, и прогнозирует лучше, чем *VAR*(4) (Baryev, Konovalov, Voinov, 2019). Поскольку в краткосрочном экономическом прогнозировании работа с малыми выборками является нередким случаем, то использование модели *CAR*(*p*) следует рассматривать как реальную альтернативу моделям *VAR*(*p*).

Одним из главных направлений развития векторных авторегрессий сегодня является формирование моделей *VARMA*(*p*, *q*) – векторный аналог известной одномерной модели *ARMA*(*p*,*q*) (Tsay, 2014). Вычислительные трудности, которые возникают при этом, могут быть преодолимы, если использовать модель *CARMA*(*p*, *q*).

2. ВРЕМЕННАЯ КОМПЛЕКСНАЯ АВТОРЕГРЕССИЯ *CTAR*(*p*)

Для построения временной комплексной авторегрессии *CTAR*(*p*) следует представить комплексную переменную ($y_{1t} + iy_{2t}$) в таком виде, чтобы в действительной части была некоторая прогнозируемая экономическая переменная, а в мнимой части комплексной переменной находилось время, в которое эта переменная наблюдалась. И здесь мы сталкиваемся с разнообразием различных форм представления именно второй – мнимой – составляющей комплексной переменной:

1) она может быть представлена в простой форме как ($y_{1t} + it$). Здесь t – текущий момент времени. Точка отсчета времени t в некоторых случаях может играть определенную роль, ведь любая линейная авторегрессия – нелинейная функция. Здесь наблюдается такое свойство – чем дальше удаляется в прошлое наблюдение наша комплексная переменная, тем меньше становится величина t и тем меньше ее влияние на текущее наблюдение;

2) она может быть представлена в виде, когда время отсчитывается назад: ($y_{1t} + i(T - t)$), где T – последнее наблюдение. Тогда наблюдается другая зависимость – чем далее в прошлое уходит комплексная переменная, тем большее значение при расчетах принимает фактор прошлого времени;

3) она может быть представлена в форме, нелинейной относительно времени: ($y_{1t} + if(t)$), где $f(t)$ – может принимать формы, задаваемые исследователем, например: ($y_{1t} + it\alpha$), где α – показатель степени.

В первом линейном относительно времени случае эта модель будет иметь такой вид:

$$y_t + it = \sum_{\tau=1}^{p}(a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i(t-\tau)) + \\ +(\varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t}). \tag{13}$$

Как и любая другая комплекснозначная функция модель *CTAR*(*p*) может быть представлена как система двух действительных равенств – для действительной части и для мнимой части. Действительная часть *CTAR*(*p*) имеет вид:

$$\mathrm{Re}\,CTAR(p): \\ \hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^{p}(a_{0\tau} y_{t-\tau} - a_{1\tau}(t-\tau)) = \\ = \sum_{\tau=1}^{p} a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^{p} a_{1\tau}(t-\tau). \tag{14}$$

Иными словами, она представляет собой действительную авторегрессию с учетом фактора времени.

Мнимая часть модели *CTAR(p)* может быть представлена в таком виде:

$\mathrm{Im}CTAR(p)$:

$$\hat{t} = \sum_{\tau=1}^{p}(a_{1\tau}y_{t-\tau} + a_{0\tau}(t-\tau)) =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{p}a_{1\tau}y_{t-\tau} + \sum_{\tau=1}^{p}a_{0\tau}(t-\tau). \quad (15)$$

А это уже зависимость времени от исследуемого показателя и предшествующих моментов времени.

Следовательно, $CTAR(p)$ моделирует авторегрессию с учетом фактора времени для действительной части и зависимость времени от предшествующих значений комплексного ряда для ее мнимой части. Сложно представить себе ситуации краткосрочного экономического прогнозирования, когда эта модель в ее комплекснозначной форме $CTAR(p)$ может быть использована. Поэтому ее свойства в этой статье рассматривать не будем.

Модель $\mathrm{Im}CTAR(p)$ прогнозирует некоторое расчетное неравномерное время (Светуньков, 2020а), и, возможно, ее следует использовать при прогнозировании времени наступления некоторого прогнозируемого события y_t. Это также не столь частый случай, чтобы останавливаться на нем более подробно.

Действительная часть (14) модели (13), являющейся ей частным случаем, может использоваться в практике экономического прогнозирования, поскольку она моделирует динамику прогнозируемого показателя.

Модель $\mathrm{Re}CTAR(p)$, как следует из (14), включает две составляющие – простую авторегрессию $AR(p)$ и факторную составляющую, в которой влияющим фактором выступает время. Эта модель похожа на модель $ARX(p, b)$ с b экзогенными переменными x_i, где $i = 1, 2, \ldots, b$, только в модели (14) экзогенными переменными выступает время.

Легко заметить, что в том случае, когда все коэффициенты $a_1\tau$ будут равны нулю, модель $\mathrm{Re}CTAR(p)$ превратится в модель $AR(p)$. Это, в свою очередь, означает, что модель (14) будет всегда не хуже описывать исходный ряд значений, нежели модель $AR(p)$.

Для проверки этого утверждения была использована база Международного института прогнозистов (http://forecasters.org/resources/time-series-data/m3-competition/). Использовались случайно выбранные ряды № 1–15, 152, 153, 202, 226, 227, 228, 646–660, 1402–1416, 2834–2848 разной длины – от 20 до 104 членов ряда. Вычисления под руководством автора статьи проводили Н. Питухин, Е. Гольцев, Г. Сирук, Ю. Селиванова и Н. Шайхлеева. Гипотеза подтвердилась. Покажем это на примере ряда, имеющего максимальную длину, а именно на примере ряда № 2830, относящегося к экономическим микропоказателям. Этот ряд состоит из 104 значений и имеет нелинейную повышательную тенденцию (рис. 1).

Поэтому ряд был приведен к «стационарному» виду вычислением первых разностей (рис. 2).

Для того чтобы иметь возможность сравнивать результаты друг с другом, были рассчитаны три наиболее часто используемые характеристики точности аппроксимации, используемые для выбора моделей возрастающей сложности (Kennedy, 2008; Peña, Tiao, Tsay, 2011; Racine, 2019):

1) среднеквадратичное отклонение ошибки аппроксимации σ;

2) информационный критерий Акаике $AIC = \ln\sigma^2 + 2k/n$;

3) Байесовский информационный критерий $BIC = \ln\sigma^2 + \frac{k\ln n}{n}$.

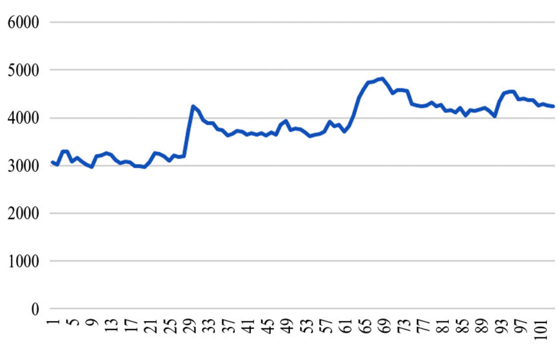

Рис. 1. Изменение во времени ряда № 2830 из базы Международного института прогнозистов

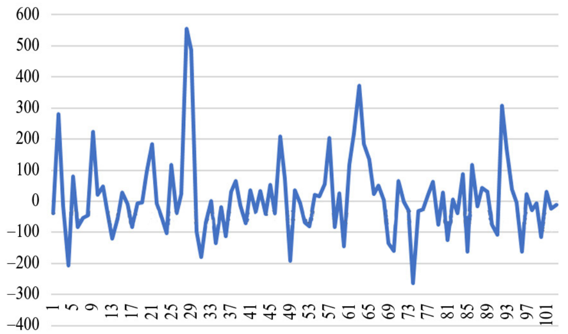

Рис. 2. Динамика показателя первой разности ряда № 2830 из базы Международного института прогнозистов

Последние два критерия используют при выборе сложных функций для моделирования, желая учесть общеизвестный научный принцип – не усложнять модель, если она не приводит к существенному улучшению результатов моделирования.

В табл. 1 представлены результаты этих вычислений.

Из данных таблицы видно, что, как и ожидалось, при любых лагах *p* среднеквадратичное отклонение ошибки аппроксимации модели Re*CTAR*(*t*) всегда меньше среднеквадратичного отклонения ошибки аппроксимации этого же ряда моделью *AR*(*p*). Первая модель показывает наилучшие результаты по этому критерию при лаге, равном 10, – для Re*CTAR*(13) СКО ошибка аппроксимации составляет 118,653. Вторая модель показывает наилучшие результаты при лаге, равном 9, – для *AR*(12) СКО составляет 119,263.

Информационные критерии показывают, что выбрать следует более простые модели – по критерию *AIC* лучшими являются Re*CTAR*(5) и *AR*(5), а по критерию *BIC* – модели Re*CTAR*(5) и *AR*(4). И в этих случаях модель Re*CTAR*(5) показывает лучшие аппроксимационные свойства – СКО у нее равно 123,939 против 123,948 и 127,437 соответственно.

Особого упоминания заслуживает модель Re*CNTAR*(*p*), в которой время представлено в нелинейной форме. Универсальной может быть признана нелинейная модель Re*CNTAR*(*p*) такой формы:

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^{p}\left(a_{0\tau}y_{t-\tau} - a_{1\tau}(t-\tau)^{\alpha_\tau}\right) = \\ = \sum_{\tau=1}^{p} a_{0\tau}y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^{p} a_{1\tau}(t-\tau)^{\alpha_\tau}. \quad (16)$$

В этой модели число коэффициентов, требующих оценки, в три раза больше, чем у модели *AR*(*p*). Если в модели *AR*(*p*) оценивать необходимо *p* неизвестных коэффициентов, в модели Re*CARE*(*p*) – уже 2*p* неизвестных

Таблица 1

Сравнение точности аппроксимации моделей Re*CTAR*(*p*) и *AR*(*p*)

Показатель	Вид модели и ее характеристики									
	Re*CTAR(t)*									
p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ	127,303	123,939	123,684	122,598	120,691	119,742	120,294	120,654	119,117	*118,653*
AIC	9,753	*9,740*	9,777	9,801	9,813	9,842	9,896	9,948	9,969	10,009
BIC	*9,830*	9,870	9,960	10,039	10,105	10,189	10,299	10,408	10,486	10,585
	AR(*p*)									
p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ	127,437	123,948	123,738	122,797	120,780	119,997	120,574	120,987	*119,263*	119,897
AIC	9,735	*9,700*	9,717	9,723	9,712	9,721	9,753	9,783	9,778	9,812
BIC	9,787	*9,778*	9,822	9,855	9,871	9,908	9,968	10,026	10,050	10,114

Примечание. Выделенные курсивным шрифтом цифры являются лучшими показателями по каждому критерию.

коэффициентов, то в модели (16) необходимо найти еще и неизвестные показатели степени, т.е. оценить $3p$ неизвестных коэффициента. Тем не менее эта модель имеет право на существование, поэтому проверим аппроксимационные свойства этой модели на том же ряде, который мы использовали ранее.

В табл. 2 приведены результаты вычисления СКО, *AIC* и *BIC* для модели (16) при разных лагах, которые сравниваются с лучшей из моделей табл. 1.

Из данных этой таблицы видно, что использование времени в нелинейной форме в модели Re*CTAR*(p) всегда улучшает аппроксимационные свойства модели. Но с ростом лага p существенно возрастает сложность этой модели, а точность аппроксимации возрастает незначительно – если при лаге, равном единице, СКО у модели с нелинейным временем меньше, чем у ее аналога с линейным временем, на 2,39%, то уже для модели с лагом, равным десяти, СКО меньше всего на 0,67%.

А поскольку оба информационные критерия рекомендуют использовать модель с минимальным количеством коэффициентов, т.е. Re*CNTAR*(4), усложнение модели не имеет смысла.

Поскольку все модели класса *CTAR*(p) являются некоторым аналогом простых авторегрессий *AR*(p) или *ARX*(p, b), то очевидным их развитием является учет ошибки аппроксимации, наподобие того, как модели *AR*(p) трансформируются в модели *ARMA*(p, q). При этом точность аппроксимации и точность краткосрочного прогнозирования новых моделей Re*CTARMA*(p, q) ожидаемо повысятся.

3. МОДЕЛЬ *CARE*(p)

Более интересные перспективы открываются перед прогнозистами при использовании другой формы комплексной авторегрессии, а именно модели с комплексной переменной, представленной в виде прогнозируемого показателя y_t в действительной части комплексной переменной, и ошибки аппроксимации ε_t в ее мнимой части – $(y_{1t} + \varepsilon i_t)$. Эта модель *CARE*($p$) связана с развитием идеи, высказанной нами еще в 2011 г. (Светуньков, 2011), когда была представлена комплекснозначная форма модели экспоненциального сглаживания:

$$\hat{y}_{t+1} + i\hat{\varepsilon}_{t+1} = (\alpha_0 + i\alpha_1)(y_t + i\varepsilon_t) + \\ +\big((1+i) - (\alpha_0 + i\alpha_1)\big)(\hat{y}_t + i\hat{\varepsilon}_t). \tag{17}$$

Таблица 2

Сравнение точности аппроксимации моделей Re*CNTAR*(p) и Re*CTAR*(p)

Показатель	Вид модели и ее характеристики									
	Re*CNTAR*(p)									
p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ	124,333	122,704	121,913	122,497	119,151	119,256	119,005	118,916	118,589	*117,871*
AIC	*9,725*	9,760	9,809	9,881	9,891	9,938	10,021	10,089	10,153	10,213
BIC	*9,829*	9,942	10,071	10,224	10,315	10,418	10,613	10,765	10,916	11,063
	Re*CTAR*(p)									
p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ	127,303	123,939	123,684	122,598	120,691	119,742	120,294	120,654	119,117	*118,653*
AIC	9,753	*9,740*	9,777	9,801	9,813	9,842	9,896	9,948	9,969	10,009
BIC	*9,830*	9,870	9,960	10,039	10,105	10,189	10,299	10,408	10,486	10,585

Примечание. Выделенные курсивным шрифтом цифры являются лучшими показателями по каждому критерию.

Исследования показали, что эта комплекснозначная модель экспоненциального сглаживания дает более точные экономические прогнозы по сравнению с моделями экспоненциального сглаживания действительных переменных, поскольку прогнозное значение показателя учитывает не только предшествующие значения переменной, но также текущую и прошлые ошибки аппроксимации (Svetunkov, Kourentzes, 2015). Поэтому и в нашем случае есть основания выдвинуть гипотезы о том, что, используя *CARE*(*p*) в прогнозировании, можно добиться повышения точности экономических прогнозов.

Здесь, как и в случае с рассмотренной ранее моделью *CTAR*(*p*), могут быть разные формы представления мнимой части. Комплексная переменная в авторегрессии может быть представлена:

1) в простой форме как $(y_{1t} + i\varepsilon_t)$, где ε_t – текущая ошибка аппроксимации;

2) в виде, когда используется не текущая ошибка аппроксимации, а предыдущая ошибка: $(y_{1t} + i\varepsilon_{(t-g)})$, где g – некоторый лаг ошибки. Такое представление модели предполагает, что модель учится на прошлых ошибках, а не на текущих;

3) в форме, нелинейной относительно ошибки аппроксимации: $(y_{1t} + if(\varepsilon_t))$, где $f(\varepsilon_t)$ – может принимать формы, задаваемые исследователем.

В линейном относительно ошибки аппроксимации случае модель *CARE*(*p*) будет иметь такой вид:

$$\hat{y}_t + i\hat{\varepsilon}_t = \sum_{\tau=1}^{p} (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i\varepsilon_{t-\tau}). \qquad (18)$$

Модель *CARE*(*p*) как комплекснозначное равенство можно представить как систему двух равенств действительных переменных – отдельно для вещественной части и отдельно для мнимой. Получим для вещественной части комплекснозначной модели (18)

$$\mathrm{Re}\,CARE(p):\ \hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^{p} a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^{p} a_{1\tau}\varepsilon_{t-\tau}. \qquad (19)$$

Для мнимой части этой модели

$$\mathrm{Im}\,CARE(p):\ \hat{\varepsilon}_t = \sum_{\tau=1}^{p} a_{0\tau}\varepsilon_{t-\tau} + \sum_{\tau=1}^{p} a_{1\tau} y_{t-\tau}. \qquad (20)$$

Таким образом, в экономическом прогнозировании, помимо общей модели *CARE*(*p*) (18), могут использоваться еще две отличающиеся друг от друга самостоятельные модели: Re*CARE*(*p*) и Im*CARE*(*p*) (Светуньков, 2020б).

Практическое применение модели Im*CARE*(*p*), когда прогнозируется ошибка аппроксимации на основе предыдущих ошибок и значений ряда, не очевидно. Поэтому в данной статье мы модель (20) рассматривать не будем.

Практическое применение модели (19) более очевидно – она может рассматриваться как частный случай общеизвестной модели авторегрессии *ARMA*(*p*, *q*):

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^{p} a_{0\tau} y_{t-\tau} + \sum_{\tau=1}^{q} a_{1\tau}\varepsilon_{t-\tau}. \qquad (21)$$

Можно заметить, что модели (19) и (21) совпадут в случае, когда $p = q$ (знак перед второй суммой правых частей этих моделей определяется при оценке коэффициентов моделей автоматически, поэтому не играет существенной роли).

Важное отличие модели Re*CARE*(*p*) от модели *ARMA*(*p*, *p*) состоит в том, что в (19) оба слагаемых представляют собой части единого целого и оцениваются одновременно. А в модели (21) предполагается взаимосвязь между первой частью *AR*(*p*) и второй частью *MA*(*q*) (Box, Jenkins, 1976), в результате которой коэффициенты $a_0\tau$ определяют величины коэффициентов $a_1\tau$, и наоборот. Это предопределяет необходимость использования итеративного метода нахождения коэффициентов модели (21). Одной из сложностей практического использования *ARMA*(*p*, *q*) заключается в том, что до сих пор нет общепринятого удовлетворительного решения задачи определения лагов p и q. Впрочем, с развитием вычислительных возможностей современных компьютеров на практике все чаще используют процедуру автоматической оценки коэффициентов $ARMA(p, q)$. Для этого, последовательно увеличивая лаги p и q, вычисляют для каждой модели информационный критерий (*AIC* или *BIC*) и по критерию минимума этого информационного критерия выбирают наилучшую модель с соответствующими лагами p и q (Fildes, 2020; Tsay, 2014). Тогда модель Re*CARE*(p), выбор которой осуществляется именно так, действительно может рассматриваться как частный случай модели $ARMA(p, q)$.

Теперь очень коротко остановимся на нелинейной относительно ошибки аппроксимации комплекснозначной авторегрессионной модели. Для нее рассматриваемая комплексная переменная представлена так: $(y_{1t} + if(\varepsilon_t))$. Подставляя ее в модель $CARE(p)$, получим

$$\hat{y}_t + if(\hat{\varepsilon}_t) = \sum_{\tau=1}^{p}(a_{0\tau} + ia_{1\tau})\big(y_{t-\tau} + if(\varepsilon_{t-\tau})\big). \quad (22)$$

Поскольку ошибки аппроксимации имеют положительные, отрицательные и нулевые значения, не каждая функция может быть использована в этой модели. Исследование тех функций, которые могут быть успешно использованы в модели (22), а также свойств авторегрессий с такими моделями выходит за рамки данной статьи. В любом случае можно утверждать, что такая модель будет иметь более чем $2p$ неизвестных коэффициентов. Поэтому с ростом p будет возрастать сложность модели и соответственно будут возрастать значения информационных критериев. Поэтому модели с нелинейными ошибками (22) могут соперничать с другими моделями краткосрочного прогнозирования только при малых лагах p.

Одной из возможных функций ошибки аппроксимации в модели (22) может быть функция сдвига ошибки. То есть в модель $CARE(p)$ вместо комплексной переменной $(y_{1t} + i\varepsilon_t)$ следует подставить комплексную переменную $(y_{1t} + i\varepsilon_{(t-g)})$, где g – некоторый сдвиг ошибки относительно текущего момента. Тогда получим

$$\hat{y}_t + i\hat{\varepsilon}_{t-g} = \sum_{\tau=1}^{p}(a_{0\tau} + ia_{1\tau})\big(y_{t-\tau} + i\varepsilon_{(t-g)-\tau}\big). \quad (23)$$

Эту модель в дальнейшем будем обозначать как $CARE(p, g)$.

В отличие от других моделей, здесь предполагается, что на текущее значение прогнозируемого показателя влияют ошибки аппроксимации, сдвинутые на g наблюдений назад. То есть здесь закладываются некоторые элементы влияния цикличности развития ряда (сезонности), которые встречаются довольно часто.

Поскольку эта модель не имеет аналогов среди существующих моделей авторегрессии, обратим на нее особое внимание.

Действительная часть модели (23) примет вид

$$\mathrm{Re}CARE(p,g):$$

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^{p} a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^{p} a_{1\tau}\varepsilon_{(t-g)-\tau}, \quad (24)$$

а мнимая часть модели – такой вид

$$\mathrm{Im}CARE(p):$$

$$\hat{\varepsilon}_{t-g} = \sum_{\tau=1}^{p} a_{0\tau}\varepsilon_{(t-g)-\tau} + \sum_{\tau=1}^{p} a_{1\tau} y_{t-\tau}. \quad (25)$$

Практическое применение мнимой части (25) этой модели сложно себе представить, а вот действительная часть модели (24) может с успехом использоваться на практике.

В том случае, когда для модели Re*CARE*(p, g) выполняется равенство $g = 0$, она превращается в модель Re*CARE*(p). Из этого следует, что модель Re*CARE*(p, g) является в этом классе моделей, линейных относительно ошибки аппроксимации, наиболее общей. Модель (24) совпадет с моделью $ARMA(p, q)$ только тогда, когда выполняется двойное равенство: $g = 0$ и $p = q$. Во всех остальных случаях модели Re*CARE*(p, g) и $ARMA(p, q)$ следует рассматривать как отличные друг от друга модели. Следовательно, имеет смысл сравнить поведение модели (24) с моделями $ARMA(p, q)$. И если новая модель покажет не худшие свойства аппроксимации или прогнозные свойства, чем модель *ARMA*(*p*, *q*), то ее можно будет рекомендовать для целей краткосрочного экономического прогнозирования.

4. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ Re*CARE*(*p*, *g*) И *ARMA*(*p*, *q*)

У модели (24) Re*CARE*(*p*, *g*) вне зависимости от сдвига *g* необходимо найти 2*p* неизвестных коэффициента, поскольку в (23) рассматриваются пары комплексных переменных. Модель (21) *ARMA*(*p*, *q*) содержит (*p* + *q*) неизвестных коэффициентов. Так что в общем случае наилучшая для прогнозируемого ряда модель Re*CARE*(*p*, *g*) может иметь другое число коэффициентов, чем будет иметь наилучшая для этого же ряда прогнозная модель *ARMA*(*p*, *q*).

Сравним вначале аппроксимационные способности моделей Re*CARE*(*p*, *g*) и *ARMA*(*p*, *q*). Будем использовать для этого тот же ряд № 2830 из базы данных Международного института прогнозистов, который мы, предварительно приведя к стационарному виду, использовали ранее для сравнения моделей Re*CTAR*(*p*) и *AR*(*p*). Для того чтобы модели имели одинаковые стартовые условия, было принято для всех моделей $\varepsilon_1 = 0$. Последовательно увеличивая порядок *p*, а для моделей *ARMA(p*, *q*) – еще и *q*, вычислялись значения критериев *AIC* и *BIC* и отбирались модели, у которых значения этих критериев являлись минимальными. Для модели Re*CARE*(*p*, *g*) осуществлялась оптимизация и по сдвигу *g*.

Результаты вычислений приведены в табл. 3. Из множества моделей здесь показаны характеристики двух наилучших моделей из класса *ARMA*(*p*, *q*) и двух наилучших моделей из класса Re*CARE*(*p*, *g*).

Можно заметить, что по значению информационного критерия *AIC* лучшей в своем классе является модель *ARMA*(4, 4).

Таблица 3

Сравнительная точность моделей *ARMA*(*p, q*) и Re*CARE*(*p, g*)

Вид модели	σ	*AIC*	*BIC*
ARMA(*p, q*)			
ARIMA(4, 4)	100,815	*9,410*	9,648
ARIMA(5, 4)	*100,276*	9,687	*9,422*
Re*CARE*(*p, g*)			
Re*CARE*(4, 2)	93,382	9,261	*9,501*
Re*CARE*(6, 3)	*88,455*	*9,245*	9,599

Примечание. Выделенные курсивным шрифтом цифры являются лучшими показателями по каждому критерию.

Об этом свидетельствует выделенное курсивным шрифтом значение критерия *AIC = 9,410*, минимальное для всех моделей. А модель *ARMA*(5, 4) является лучшей по Байесовскому информационному критерию *BIC*. Его минимальное значение для всех моделей этого типа также выделено в таблице курсивным шрифтом и равно *BIC = 9,422*. Поскольку и среднеквадратичное отклонение ошибки аппроксимации у этой модели меньше, чем у модели *ARMA*(4, 4) (выделено курсивным шрифтом и равно *100,276*), то следует предпочесть для аппроксимации модель *ARMA*(5, 4).

Аналогичные наилучшие показатели из семейства Re*CARE*(*p*, *g*) также выделены в таблице курсивным шрифтом. Лучшими являются модели Re*CARE*(4, 2) и Re*CARE*(6, 3). При этом модель Re*CARE*(4, 2) является наилучшей по информационному критерию *BIC*, который более чувствителен к росту числа коэффициентов, поскольку эта модель содержит 8 неизвестных коэффициентов, в то время как модель Re*CARE*(6, 3) содержит 12 неизвестных коэффициентов. А вот по среднеквадратичному отклонению ошибки аппроксимации и по критерию *AIC* лучшей является модель Re*CARE*(6, 3).

Если сравнивать теперь друг с другом лучшие в каждом классе модели по точности аппроксимации, то модель Re*CARE*(6, 3) будет аппроксимировать исходный ряд на 13,3%, точнее, чем модель *ARMA*(5, 4). А это очень серьезное повышение точности аппроксимации. Обратим внимание и на то, что в модели RE*CARE*(6, 3) оценивались 12 коэффициентов, а в модели *ARMA*(5, 4) – 9 коэффициентов.

На рассматриваемом примере модели нового класса демонстрируют предпочтительность по сравнению с моделями класса *ARMA*(*p*, *q*). Точность ошибки аппроксимации – важный показатель, который свидетельствует в пользу новой модели краткосрочного прогнозирования, но, как известно из экономической практики, далеко не всегда лучшая в аппроксимации модель является лучшей для прогнозирования. А нас интересует возможность использовать новую модель именно для краткосрочного прогнозирования в экономике. Поэтому следует сравнить модели семейства *ARMA*(*p*, *q*) с моделями семейства Re*CARE*(*p*, *g*) по точности ретропрогноза, а значения информационных критериев будут нужны только как некоторая дополнительная характеристика.

Воспользуемся тем же рядом базы, состоящим из 104 наблюдений. Теперь разобьем его на две части – обучающую и проверочную. По первым 85 наблюдениям обучающего множества значений будут вычисляться коэффициенты моделей двух сравниваемых типов – *ARMA*(*p*, *q*) и Re*CARE*(*p*, *g*). А последние 19 наблюдений ряда будут использоваться как проверочное множество для каждой из этих моделей. На этих последних значениях будут выполняться с помощью оцененных на обучающем множестве моделей краткосрочные прогнозы на один шаг: сначала на 86-м наблюдении, затем на 87-м наблюдении и т.д. до последнего 104-го наблюдения. Прогнозные значения сравнивались с фактическими значениями, и вычислялась ошибка ретропрогноза. Нас интересуют те модели, которые наилучшим образом показывают себя в качестве прогнозных на проверочном множестве, поэтому критерием выбора наилучших моделей будет выступать критерий минимума СКО ошибки ретропрогноза на проверочном множестве.

Как и в случае сравнения по точности аппроксимации моделей типа *ARMA*(*p*, *q*) и Re*CARE*(*p*, *g*), выберем по две наилучшие модели каждого типа, которые показывают наименьшую дисперсию ошибки ретропрогноза на проверочном множестве. Эти результаты приведены в табл. 4.

Из данных табл. 4 видно, что наилучшая в своем классе модель Re*CARE*(5, 5) прогнозирует 19 последних наблюдений с минимальной ошибкой ретропрогноза, для которой среднеквадратичное отклонение σ = 111,619. При этом наилучшая модель в своем классе, модель *ARMA*(5, 1), дает более высокую СКО ошибки ретропрогноза, а именно σ = 117,275. Это на 5% больше, чем у модели Re*CARE*(5,5). И это тоже значимая величина уменьшения ошибки для экономического прогнозирования. Любопытно, что и с позиций точности аппроксимации на обучающем множестве модель Re*CARE*(5, 5) показала отличную точность – ее СКО равно 95,12, что на 28% меньше, чем у лучшей модели *ARMA*(5, 1).

Таблица 4

Сравнительная точность ретропрогноза моделей *ARIMA*(*p*, *q*) и Re*CARE*(*p*, *g*)

Вид модели	Результаты аппроксимации на обучающем множестве			СКО ошибки ретропрогноза на проверочном множестве
	σ	*AIC*	*BIC*	
ARMA(*p*, *q*)				
ARMA(5, 1)	121,913	8,867	9,060	117,275
ARMA(3, 1)	125,071	9,117	9,284	118,661
Re*CARE*(*p*, *g*)				
Re*CARE*(5, 5)	95,1161	8,512	8,379	*111,619*
Re*CARE*(1, 3)	126,530	9,068	9,152	116,275

Примечание. Выделенная курсивным шрифтом цифра является лучшим показателем по каждому критерию.

Итак, мы видим, что как с позиций наилучшей аппроксимации исходного ряда, так и с позиций ретропрогноза новая модель Re*CARE*(*p*, *g*) оказалась лучше, чем общеизвестная модель *ARMA*(*p*, *q*). Из этого, конечно же, не следует вывода о том, что новые модели всегда будут точнее моделей *ARMA*(*p*, *q*). Для нескольких десятков рядов из базы экономических показателей Международного института прогнозирования, выбранных случайным образом, она практически всегда оказалась лучше – на доли процентов или на десятки процентов. Вполне возможно, что для каких-нибудь других рядов новая модель может оказаться хуже модели *ARMA*(*p*, *q*). Но уже сейчас следует сделать вывод о том, что модель Re*CARE*(*p*, *g*) может занять в инструментарии краткосрочного экономического прогнозирования то же место, что и модели класса *ARMA*(*p*, *q*), выступая в ряде случаев достойной альтернативой этой модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Комплекснозначные авторегрессионные модели, рассмотренные в этой статье, показывают многообразие возможностей их использования в краткосрочном экономическом прогнозировании. Некоторые из них такие как Re*CARE*(*p*, *g*) и Re*CTAR*(*p*) уже сегодня можно рекомендовать использовать в краткосрочном экономическом прогнозировании.

Область применения общей модели *CAR*(*p*) также понятна – являясь частным случаем векторной авторегрессии *VAR*(*p*) и имея меньшее, чем у нее, число коэффициентов, она может с успехом использоваться для краткосрочного экономического прогнозирования в условиях малых выборок или в ситуациях больших значений лагов *p*. Для этих же случаев модель *CARMA*(*p*, *q*) может оказаться эффективнее модели *VARMA*(*p*, *q*).

Но остается не исследованной возможность трансформации модели Re*CTAR*(*p*) в модель Re*CTAR*(*p*, *g*), а также ее трансформации в модель Re*CTARMA*(*p*). Возможно, что такие модели будут обладать важными для целей краткосрочного экономического прогнозирования свойствами.

Мы оставили в стороне от исследования свойства моделей, представляющих собой мнимые части рассмотренных моделей Im*CTAR*(*p*) и Im*CARE*(*p*), поскольку их практическая значимость не очевидна. При более тщательном исследовании эта значимость может раскрыться.

Также без тщательного рассмотрения остались две базовые комплекснозначные авторегрессионные модели – *CTAR*(*p*) и *CARE*(*p*), а также суть моделируемых этими моделями комплексных переменных.

Скрупулезное изучение свойств всех моделей комплексных авторегрессий является предметом наших будущих исследований, но уже сегодня мы может утверждать, что и в этом разделе экономики комплекснозначная экономика демонстрирует успешность при решении прикладных экономических задач.

Список литературы / References

Светуньков И.С. (2011). Краткосрочное прогнозирование социально-экономических процессов с использованием модели с коррекцией // БІЗНЕС-ІНФОРМ. № 5 (4). С. 109–112. [Svetunkov I.S. (2011). Short-term forecasting of socio-economic processes using a model with correction. *BIZNES-INFORM*, no. 5 (4), pp. 109–112 (in Russian).]

Светуньков С.Г., Светуньков И.С. (2019). Производственные функции комплексных переменных: экономико-математическое моделирование производственной динамики. 2-е изд., доп. М.: Ленанд. 170 с. [Svetunkov S.G., Svetunkov I.S. (2019). Production functions of complex variables: Economic and mathematical modeling of production dynamics. Edition 2, add. Moscow: Lenand. 170 p. (in Russian).]

Светуньков С.Г. (2020a). Прогнозирование экономической динамики с помощью комплекснозначной авторегрессии с временной составляющей (CTAR) // Современная экономика: проблемы и решения. № 9. С. 21–30. [Svetunkov S.G. (2020a). Forecasting economic dynamics using complex-valued autoregression with a time component (CTAR). *Modern Economics: Problems and Solutions*, no. 9, pp. 21–30 (in Russian).]

Светуньков С.Г. (2020б). Комплекснозначная авторегрессия в экономическом прогнозировании одномерных рядов // Экономическая наука современной России. № 4 (91). С. 51–62. [Svetunkov S.G. (2020b). Complex-valued autoregression in economic forecasting of one-dimensional series. *Economics of Contemporary Russia*, no. 4 (91), pp. 51–62 (in Russian).] DOI: 10.33293/1609-1442-2020-4(91)-51-62

Baryev D., Konovalov I., Voinov N. (2019). New approach to feature generation by complex-valued econometrics and sentiment analysis for stock-market prediction. In: Arseniev D., Overmeyer L., Kälviäinen H., Katalinić B. (eds). Cyber-Physical Systems and Control. CPS&C *Lecture Notes in Networks and Systems*, 2019, vol. 95, pp. 573–582.

Box G.E.P., Jenkins G.M. (1976). Time series analysis, forecasting and control. Holden-day, Inc.

Fildes R. (2020). Learning from forecasting competitions. *International Journal of Forecasting*, no. 36, pp. 3–18.

Kennedy P. (2008). A Guide to Econometrics. John Wiley & Sons. 598 p.

Peña D, Tiao G.C., Tsay R.S. (2011). A Course in Time Series Analysis. London: John Wiley & Sons. 496 p.

Racine J.S. (2019). Reproducible Econometrics Using R. Oxford: Oxford University Press. 320 p.

Svetunkov I., Kourentzes N. (2015). Complex exponential smoothing. Working Paper of Department of Management Science. Lancaster: Lancaster University. 31 p.

Svetunkov S. (2012). Complex-valued modeling in economics and finance. New York: Springer Science+Business Media. 318 p.

Tsay R.S. (2014). Multivariate time series analysis: With R and financial applications. Hoboken: John Wiley & Sons Inc. 492 p.

Рукопись поступила в редакцию 13.03.2021 г.

SHORT-TERM ECONOMIC FORECASTING BY COMPLEX-VALUED AUTOREGRESSIONS

S.G. Svetunkov

DOI: 10.33293/1609-1442-2021-4(95)-35-48

Sergey G. Svetunkov, Graduate School of Business Engineering, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia, sergey@svetunkov.ru

Acknowledgment. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, Grant No. 19-010-00610\19 "Theory, Methods and Techniques for Forecasting Economic Development by Autoregressive Models of Complex Variables".

One of the directions that can expand the instrumental base for modeling the economy is complex-valued economics – a section of economic and mathematical modeling devoted to the use of models and methods of the theory of the function of a complex variable in economics. The article discusses the possibility of short-term economic forecasting using autoregressive models of complex variables. A classification of possible modifications of complex-valued autoregressive models is given, and the main properties of each of the classes of these models are shown. One of the varieties of these complex-valued models uses current and past errors of approximation, which means that it can be compared with the widely used model of autoregressive real variables *ARIMA*(*p*, *d*, *q*). The article makes such a comparison, both on a theoretical level and on a practical example.

Keywords: complex-valued economics, short-term economic forecasting, autoregressive models
JEL classification: C53.

Manuscript received 13.03.2021