School of Economics", Moscow, Russia; ecolena@mail.ru. ORCID 0000-0002-3381-6116
Lyubov E. Khrustova, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow; NRU "Higher School of Economics", Moscow, Russia; khrustoval@yandex.ru
Igor' S. Demin, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia; ig.demin@gmail.com

Acknowledgment. The article reflects the results of research carried out at the expense of budgetary funds on the state order of the Financial University in 2019.

Russian economy was influenced by western sanctions in many spheres. Russian credit market was significantly impacted as well. The presented work suggests that except for the strict influence in form of financial restrictions and assets freezing, sanctions also had indirect impact. Emotional presentation of Russian sanctions in abroad media can be claimed as one of the indirect factors, which form banking management expectations of economic situation and influences people to have loans and place money into deposits. The aim of research is to estimate the influence of news about Russian sanctions tonality in foreign media on the level of credit and deposit interest rates in Russian commercial banks. To achieve this goal, the following hypotheses were claimed: there is a connection between the way in which sanctions against Russia are presented in foreign media and the level of interest rates; there is a difference in the impact of positive and negative news texts on the expectations, determining changes in interest rates. «Bag of words» technique and a special dictionary, which helps to identify the emotional tonality of the text, were used to achieve the declared aim. Advanced modeling of interest rates was carried out using the vector autoregression (VAR) model, supplemented by the construction of the impulse response function and the calculation of the rate dispersion decomposition. As a result, a hypothesis about the influence of news tonality on commercial bank interest rates' was approved.
Keywords: Russian credit market, sanctions, sanctions' influence, commercial banks, interest rates, text analysis.
JEL classification: E21, E43, E44.

Manuscript received 17.03.2020

О МОДЕЛИРОВАНИИ ВЛИЯНИЯ ЭПИДЕМИИ COVID-19 НА ДОХОДЫ НАСЕЛЕНИЯ[1]

В.В. Лебедев, К.В. Лебедев

DOI: 10.33293/1609-1442-2021-1(92)-116-133

В работе обсуждается подход к оценке влияния эпидемии COVID-19 в России на экономическую эффективность и, как следствие, на денежные доходы населения страны. Используемый подход основан на применении методологии математического моделирования. На основе анализа статистической информации показано, что существует корреляция динамики среднедушевых доходов населения и ВВП. Для оценки динамики ВВП построена динамическая модель влияния ограничительных мер, направленных на сдерживание распространения эпидемии COVID-19, на макроэкономическую эффективность. Основная гипотеза модели заключается в том, что главным фактором, влияющим на эффективность экономики, является производительность труда работников, создающих конечный продукт. В построенной модели все работники разделены на три группы. Первая группа – работники, на деятельность которых COVID-19 не повлиял; вторая группа – работники, производительность труда которых снизилась из-за COVID-19; третья группа – работники, производительность труда которых полностью или частично восстановилась после смягчения ограничительных мер. В результате динамика ВВП задается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений,

© Лебедев В.В., Лебедев К.В., 2021 г.

Лебедев Валерий Викторович, д.э.н., главный научный сотрудник, ЦЭМИ РАН, Москва, Россия; lebedev.guu@gmail.com
Лебедев Константин Валерьевич, к.э.н., заместитель директора Института регионального развития и анализа ФГАОУ ДПО «Академия Минпросвещения России», Москва, Россия; k.lebedev@eit.edu.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-010-00921).

значения параметров которой зависят от эпидемиологической ситуации. Для оценки показателей, характеризующих распространение инфекции и влияющих на параметры модели макроэкономической эффективности, построена дискретная модификация классической *SIR*-модели эпидемии с кусочно-постоянными параметрами. Эта модель позволила оценить динамику средних за четыре дня значений основного репродуктивного числа и других показателей распространения инфекции на основе использования официальной статистической информации в базовом периоде, а также выполнить сценарные расчеты развития эпидемии в Москве и вне ее до июля 2021 г. Разработанная модификация модели *SIR* допускает ее уточнение, связанное с учетом влияния вакцинации населения на динамику эпидемиологического процесса.

Ключевые слова: среднедушевые денежные доходы, динамика ВВП, эпидемия COVID-19, экономическая эффективность, математическое моделирование.

Классификация JEL: C02, C31, C32.

ВВЕДЕНИЕ

Разразившаяся в 2020 г. пандемия, вызванная коронавирусом COVID-19, повлияла и продолжает влиять на все стороны жизни не только в России, но и во всем мире. Влияет она и на денежные доходы населения. Среднедушевые денежные доходы населения в месяц входят в перечень макроэкономических показателей как России в целом, так и отдельных ее субъектов. Если принять общее число используемых для анализа макроэкономического развития показателей равным m, то макроэкономическая динамика может быть представлена как некоторая траектория в m-мерном пространстве.

На рис. 1 приведена проекция траектории макроэкономики РФ за 2011–2019 гг. на плоскость «конечный продукт – денежные доходы населения». Здесь значения конечного продукта Y и среднедушевые денежные доходы населения в месяц M нормированы (за единицу приняты их значения в 2011 г.), а по координатным осям отложены натуральные логарифмы этих значений. При построении проекции траектории макроэкономики РФ на рис. 1 использованы данные Федеральной службы государственной статистики (Росстат-1, 2020; Росстат-2, 2020).

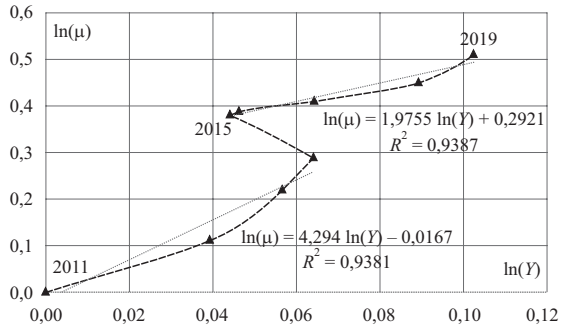

Рис. 1. Проекция траектории макроэкономики РФ за 2011–2019 гг. на плоскость «ВВП – денежные доходы населения»

Источник: расчеты авторов по данным Росстата (Росстат-1, 2020; Росстат-2, 2020).

Как следует из приведенных на рис. 1 данных, при увеличении ВВП на 1% среднедушевые денежные доходы населения увеличивались за последние пять лет в среднем примерно на 2%, а за предыдущие четыре года – примерно на 4%. Поэтому значение коэффициента эластичности гипотетической зависимости $Y(M)$ составляло около 2 в период 2015–2019 гг.

Сложность оценки динамики доходов населения на перспективу связана с тем, что на изменение доходов влияет множество факторов. Однако если принять гипотезу о существовании корреляционной связи среднедушевых денежных доходов населения в месяц и конечного продукта, то для количественной оценки влияния эпидемии COVID-19 на доходы населения можно использовать количественные оценки влияния эпидемии на эффективность экономики. Такие оценки существуют, приведем две из них.

Первая принадлежит А.Г. Аганбегяну: «Пандемия коронавируса приведет к сокращению ВВП России минимум на 5 процентов. Как следствие, реально располагаемые доходы населения сократятся в интервале от 5 до 10 процентов в 2020 году, а число бедных

увеличится в полтора-два раза» (Аганбегян, 2020). Вторая оценка выполнена специалистами Центра макроэкономического анализа и краткосрочного прогнозирования (ЦМАКП), которые рассматривали три сценария: оптимистический, базовый и пессимистический. Согласно базовому сценарию ЦМАКП, в 2020 г. ВВП в РФ может сократиться на 8–8,3%, а согласно пессимистическому сценарию – на 11%. При этом реальная заработная плата, согласно базовому сценарию, снизится в 2020 г. на 4,5–4,8%, а согласно пессимистическому сценарию – на 7,0–7,3% (Белоусов, Сальников и др., 2020; Белоусов, 2020).

Так как на макроэкономическую динамику влияет большое число различных факторов, то для выполнения соответствующих прогнозных оценок необходимо *использовать имитационные модели большой размерности*. Однако для получения качественной картины влияния COVID-19 на динамику ВВП, позволяющей заглянуть за горизонт, можно использовать *упрощенные подходы*. Ниже для получения количественных оценок влияния на экономическую эффективность ограничительных мер, направленных на сдерживание распространения COVID-19, используется *метод биологической аналогии*, реализация которого опирается на концептуальную основу классической *SIR*-модели математической эпидемиологии (Kermack, McKendrick, 1927). При таком подходе вопросы влияния пандемии конкретно на цены на нефть, на товарооборот, на финансовый сектор и другие показатели макроэкономического развития не затрагиваются. Тем не менее используемый упрощенный подход позволяет получить наглядное представление о возможной глубине и продолжительности спада экономики.

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КОНЕЧНОГО ПРОДУКТА

Ключевая идея модели *SIR* заключается в разделении рассматриваемой популяции, в которой развивается эпидемия, на три части: здоровые (*S*, susceptible; восприимчивые к заражению, не болевшие), больные (*I*, infected; инфицированные) и переболевшие (*R*, recovered; сюда входят как выздоровевшие, так и погибшие). Эту идею применим для приближенного описания макроэкономической динамики, подверженной влиянию COVID-19. Для реализации такого подхода будем считать, что главным фактором, влияющим на эффективность экономики, является производительность труда работников, создающих конечный продукт.

Итак, разделим всех работников, создающих конечный продукт, на три группы, используя обозначения, принятые в классической *SIR*-модели эпидемии. Первая группа (*S*) объединяет работников, на деятельность которых эпидемия не повлияла; вторая группа (*I*) объединяет работников, производительность труда которых снизилась из-за введения ограничительных мер (частичное закрытие предприятий, переход на «удаленный режим работы» и самоизоляцию и т.д.); третья группа (*R*) состоит из работников, производительность труда которых полностью восстановилась после снятия ограничительных мер. Обозначим доли этих трех групп в общем числе работников *N* соответственно *s*, *y* и *z*. Так как

$S + I + R = N$ и $s = S/N$, $y = I/N$, $z = R/N$, то

$$s + y + z = 1. \quad (1)$$

Кумулятивная доля всех работников, на производственную деятельность которых повлиял COVID-19, составляет $y + z = 1 - s$. Обозначим $x = 1 - s$. Далее предположим, что ВВП увеличивался бы при отсутствии эпидемии с постоянным темпом α: $Y = Y_0 \exp(\alpha t)$. Для оценки влияния эпидемии в эту формулу включим корректирующий множитель – среднюю эффективность работников $E(t)$. В результате динамику ВВП будем вычислять по формуле

$$Y(t) = E(t) \cdot Y_0 \exp(\alpha t). \quad (2)$$

Для расчета показателя эффективности $E(t)$ предположим, что относительные эффективности труда работников, входящих в рассматриваемые три группы, равны соответственно 1, p и 1. Здесь $0 \le p \le 1$. Поэтому для средней эффективности $E(t)$ всех работников получаем $E = s + py + z$ и, таким образом:

$$E(t) = 1 - (1-p)y(t). \tag{3}$$

Перейдем теперь к вопросу вычисления динамики переменной $y(t)$. Отметим, что

$$y(t) = x(t) - z(t). \tag{4}$$

Поэтому для определения динамики переменной $y(t)$ необходимо построить модель динамики переменных $x(t)$ и $z(t)$. Предположим, что в некоторый (начальный) момент времени $t = 0$ органами управления введены ограничительные меры, в результате чего производительность труда части работников снижается (доля этих работников равна y), вследствие чего общая эффективность производства падает. Это снижение, вызванное переходом части работников из группы S в группу I, прекращается через некоторый период времени после принятия властями решения об ослаблении ограничительных мер на основании изменившейся к лучшему эпидемиологической обстановки. Вызванный этими решениями соответствующий рост эффективности производства обусловлен постепенным переходом части работников из группы I в группу R. Сказанное можно выразить системой двух дифференциальных уравнений, которые задают динамику переменных x и z:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \begin{cases} 0, \text{ если } t \le t_0; \\ \beta(a-x), \text{ если } t > t_0; \end{cases} \\ \dfrac{dz}{dt} = \begin{cases} 0, \text{ если } t \le t_1; \\ \gamma(b-z), \text{ если } t > t_1. \end{cases} \end{cases} \tag{5}$$

Начальные условия системы (5): $x(0) = 0$, $z(0) = 0$. Здесь t_0 – день введения ограничительных мер; t_1 – день отмены (полной или частичной) ограничительных мер $(t_1 > t_0)$; β – коэффициент перехода работников из группы S в группу I; γ – коэффициент перехода работников из группы I в группу R (коэффициент восстановления экономической активности); a и b – параметры жесткости ограничительных мер, определяющие глубину провала экономики $(0 < b \le a < 1)$. В качестве единицы измерения времени принят один день.

Выпишем решение системы (5):

$$\begin{cases} x = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 \le t \le t_0; \\ a(1-\exp[-\beta(t-t_0)] \text{ при } t > t_0; \end{cases} \\ z = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 \le t \le t_1; \\ b[1-\exp(-\gamma(t-t_1)] \text{ при } t > t_1. \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

Из формул (4) и (6) получаем функцию $y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \le t \le t_0; \\ a(1-\exp[-\beta(t-t_0)], \text{ если } t_0 < t \le t_1; \\ a(1-\exp[-\beta(t-t_0)] - \\ -b(1-\exp(-\gamma(t-t_1)), \text{ если } t > t_1. \end{cases} \tag{7}$$

Функция (7) задает долю работников, эффективность деятельности которых на дату t снижена до уровня p.

Вычислим значение переменной t, $t_* > t_1$ такое, что $y'(t_*) = 0$:

$$t_* = \frac{\ln(R_0 a / b)] / \gamma - t_1 + R_0 t_0}{R_0 - 1}, \tag{8}$$

где $R_0 = \beta / \gamma$.

Утверждение. Если $R_0 > 1$ и $t_* \ge t_1$, то функция (7) принимает максимальное значение в точке $t = t_*$. Иначе, функция (7) имеет максимум в точке $t = t_1$.

Число $R_0 = \beta / \gamma$ является пороговой (threshold) характеристикой процесса: необходимым условием увеличения доли второй группы работников и соответствующего снижения эффективности экономической деятельности после снятия ограничительных мер служит неравенство $R_0 > 1$. Эта пороговая характеристика – аналог основного репродук-

тивного числа в математической теории эпидемии (см. ниже в п. 3).

Итак, если параметры a, b, β, γ, t_0 и t_1 модели (5) заданы, а также задано значение параметра p – относительной эффективности труда работников группы I, то для количественной оценки снижения эффективности экономической деятельности нужно подставить функцию (7) в формулу (3).

Как показало развитие пандемии осенью 2020 г. как в России, так и за рубежом, период ограничительных мер может быть не один. Поэтому построенная модель (5) должна быть модифицирована с учетом повторного введения ограничительных мер и последующей их отмены (или ослабления). Модель (5) допускает такую модификацию включением в нее параметров $t_{2(k-1)}$ (день введения в действие ограничительных мер k), $t_{2(k-1)}$ (день отмены действия ограничительных мер k) и др.

На рис. 2 приведены два варианта зависимостей от времени конечного продукта (2) для некоторой страны, в которой развивается эпидемия COVID-19 в течение двухлетнего периода (720 дней). Здесь за начало отсчета принят первый день II квартала 2020 г., т.е. 1 апреля. Поэтому точки $t = 270$ и $t = 630$ соответствуют концу декабря 2020 и 2021 гг. соответственно.

Первый вариант соответствует динамике ВВП при отсутствии эпидемии (линия 1). Здесь предполагается, что годовой прирост ВВП составляет 2% (Прогноз, 2020). Второй вариант соответствует динамике ВВП при эпидемии в случае двух периодов введения ограничительных мер (линия 2, имеющая W-образную форму). Здесь в момент времени $t_0 = 0$ (т.е. 1 апреля) начинается первый период ограничительных мер, который длится 60 дней, после чего жесткие ограничения отменяются. Это приводит к тому, что после отмены ограничений при $t_1 = 60$ средняя эффективность и конечный продукт начинают возрастать. Рост ВВП продолжается 170 дней до $t_2 = 230$. В 230-й день начинается второй период действия ограничительных мер, что приводит к повторному снижению эффективности и, как следствие, к падению ВВП. Здесь предполагается, что продолжительность второго периода действия ограничений равна, как и длительность первого периода, 60 дням. Поэтому $t_3 = 290$, и начиная с 290-го дня средняя эффективность и конечный продукт снова начинают расти. В результате докризисный уровень производства восстанавливается лишь к концу 2021 г. (согласно выполненным расчетам при заданных значениях параметров модели ВВП достигает уровня 1 апреля 2020 г. в середине IV квартала 2021 г.).

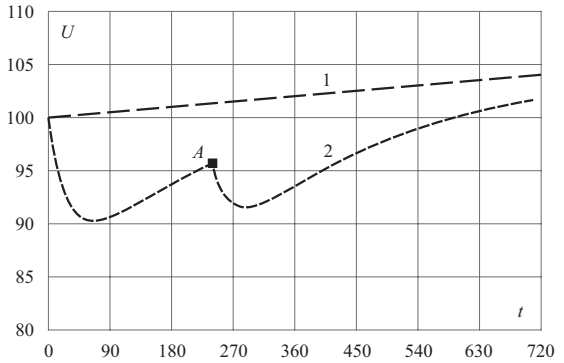

Рис. 2. Два варианта динамики конечного продукта

Источник: расчеты авторов.

Приведенный сценарий качественно совпадает с реальным развитием экономики РФ: по данным Банка России во II квартале 2020 г. годовое снижение ВВП составило 8%, а согласно выполненным оценкам ВВП снизится в 2020 г. на 4,0–5,0% (Экономика, 2020).

Завершая обсуждение модели (1)–(5) отметим следующее.

1. Существенно, что расчетная динамика ВВП зависит от значений параметров модели. Приведенные результаты расчетов были выполнены в середине ноября 2020 г. накануне подачи рукописи в редакцию, когда отсутствие достаточно полной статистической информации о динамике ВВП в 2020 г. не позволяло выполнить количественные оценки значений этих параметров. И хотя полученные результаты расчетов не противоречат известным опубликованным оценкам (Аганбегян, 2020; Белоусов, Сальников и др., 2020; Эконо-

мика, 2020), приведенная на рис. 2 динамика ВВП имеет иллюстративный характер.

2. Значения параметров модели, определяющих начало и конец периода действия ограничительных мер, связаны с эпидемиологической ситуацией. Поэтому рассмотренная модель для усиления адекватности должна быть дополнена моделью эпидемии. Ниже рассматриваются базовая модель математической эпидемиологии *SIR* (разд. 3 и 4), а также ее конечноразностная модификация, которая используется для анализа на перспективу статистических данных развития эпидемии COVID-19 в РФ (разд. 5).

МОДЕЛЬ *SIR* – БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ ТЕОРИИ ЭПИДЕМИЙ

Математическая теория эпидемий имеет более чем 200-летнюю историю. Одно из первых применений математических методов в эпидемиологии связано с именем Даниила Бернулли, который в середине XVIII в. использовал математический аппарат для анализа эффективности прививок против натуральной оспы (Bernoulli, 1760; Dietz, Heesterbeek, 2002). В настоящее время *математическая теория эпидемий представляет собой обширную область знаний*, в которой широко применяются различные математические модели процесса переноса возбудителя инфекции от больных к здоровым, начиная от простейших моделей регрессионного типа и заканчивая сложными прикладными динамическими имитационными моделями большой размерности, в том числе опирающимися на агентный подход. Литература, в которой излагаются различные динамические модели эпидемий, весьма обширна (Бароян, Рвачев и др., 1972; Андерсон, Мэй, 2004; Diekmann, Heesterbeek, 2000).

Особое место занимает в математической эпидемиологии модель эпидемии *SIR* (Kermfk, 1927). Эта модель и ее свойства хорошо известны (Hethcote, 2000; Братусь, Новожилов и др., 2010). Не будет преувеличением сказать, что эта модель занимает в эпидемиологии такое же место, какое занимают модель Солоу или модель Кейнса в экономической теории. Мы излагаем ее здесь достаточно подробно в связи с двумя обстоятельствами. Во-первых, трактовка некоторых свойств модели не только в СМИ, но и в научной литературе бывает нечеткой (если не сказать некорректной) и поэтому требует уточнений. Во-вторых, понимание свойств *SIR*-модели необходимо для обсуждения в дальнейшем результатов анализа статистических данных о распространении COVID-19 в России.

Итак, в модели эпидемии *SIR* все население, численность которого равна N, делится на три группы: восприимчивые (S), инфицированные (I) и переболевшие (R). Предполагается, что каждый конкретный индивидуум находится в одной из этих групп. Согласно сложившейся традиции, численности названных групп населения обозначаются S, I и R.

Динамика переменных *SIR*-модели задается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\dfrac{\beta IS}{N}; \\ \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{\beta IS}{N} - \gamma I; \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \tag{9}$$

с начальными условиями $S(0) = S_1$, $I(0) = N - S_1 - R_1$, $R(0) = R_1$. Если эпидемия рассматривается с самого ее начала, то при $t = 0$ выполнены условия $I(0) << N$ и $R_1 = 0$. Без этого замечания система ОДУ (9) отражает развитие процесса с любого выбранного начального момента $t = 0$.

Динамика переменных модели (9) зависит от ее трех параметров: коэффициента заражения β (infectivity rate), коэффициента выздоровления γ (recovery rate), числа потенциальных больных N. Все эти три параметра в модели предполагаются постоянными.

Размерности фазовых переменных S, I и R в модели SIR – численность людей. Поэтому если T – размерность времени, то параметры β и γ имеют размерность $1/T$. В дальнейшем единицей измерения времени будем считать один день.

Параметры модели (9) допускают следующую трактовку: 1/β – средний период времени T_C, в течение которого один заболевший заражает одного здорового; 1/γ – средняя продолжительность инфекционного периода (болезни) T_I.

Из системы дифференциальных уравнений (9) следует $S'(t)+I'(t)+R'(t)=0$, так как

$$S(t)+I(t)+R(t)=N. \tag{10}$$

Ниже мы будем опираться на использование статистических данных, которые не содержат информацию о числе восприимчивых, но в которых приводятся ежедневные значения выявленных больных (C, confirmed, подтвержденные). Поэтому далее при изложении модели SIR в качестве основных фазовых переменных используется (в отличие от традиционного изложения) число выявленных больных $C(t)$ и число переболевших $R(t)$. Обе эти переменные представляют собой монотонно возрастающие функции времени.

Перейдем к безразмерным переменным: $x = C/N$, $y = I/N$, $z = R/N$. Из уравнений (8), (9) и соотношения $C(t) = N - S(t)$ следует, что динамика переменных $x(t)$ и $z(t)$ определяется системой двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\beta(x-z)(1-x); \\ \dfrac{dz}{dt}=\gamma(x-z) \end{cases} \tag{11}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$ и $z(0) = z_0$, где $x_0 = 1 - S_1/N$, $z_0 = R_1/N$. При этом доля $y(t)$ инфицированных больных определяется формулой

$$y(t)=x(t)-z(t). \tag{12}$$

Существенно, что из системы (11) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dz}=(1-x(t))R_0, \tag{13}$$

где $R_0=\beta/\gamma$.

Отношение параметров β и γ называют основным, или базовым, репродуктивным числом (basic reproduction number), а величину $(1 - x(t))R_0$ – эффективным репродуктивным числом (effective reproduction number). Это важные пороговые характеристики эпидемии.

Основное репродуктивное число служит количественной оценкой среднего числа людей, которых заражает один больной в ходе своей болезни. Это следует из того, что $\beta = 1/T_C$, $\gamma = 1/T_I$, и поэтому $R_0=T_I/T_C$.

Смысл эффективного репродуктивного числа $R_e(t)=(1-x(t))R_0$ следует из уравнения (13): в процессе распространения эпидемии увеличение числа переболевших на одного человека сопровождается появлением R_e новых больных.

Выпишем решение дифференциального уравнения (13) с учетом условия $x(z_0) = x_0$:

$$z=h(x,x_0,z_0,R_0), \tag{14}$$

где $h(x,x_0,z_0,R_0)=z_0+\dfrac{1}{R_0}\ln\left(\dfrac{1-x_0}{1-x}\right)$.

Поэтому динамика эпидемии согласно SIR-модели фактически определяется одним нелинейным дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt}=\beta\big(x-h(x,x_0,z_0,R_0)\big)(1-x) \tag{15}$$

с начальным условием $x(0)=x_0$ и параметрами z_0, β и R_0. Эти четыре числа (x_0, z_0, β и R_0) однозначно определяют динамику переменных x, y и z в модели SIR. Решение уравнения (15) может быть записано следующим образом:

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{du}{\beta\big(u-h(u,x_0,z_0,R_0)\big)(1-u)}.$$

На практике решение уравнения (15) можно получить численными методами.

4. СВОЙСТВА МОДЕЛИ *SIR*

Для дальнейшего изложения удобно перейти к безразмерному времени $\tau = t/T_C$, т.е. $\tau = \beta t$. Это означает, что теперь единицей измерения становится средний период времени T_C, в течение которого один заболевший заражает одного здорового: если, например, $\tau = 1$, то $t = T_C$; если $\tau = 2$, то $t = 2T_C$ и т.д.

Используя замену $\tau = \beta t$, из уравнения (15) получаем

$$\frac{dx}{d\tau} = \left(x - h(x, x_0, z_0, R_0)\right)(1 - x) \qquad (16)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$ и параметрами z_0 и R_0. Таким образом, при использовании безразмерного времени $\tau = \beta t$ динамику переменных x, y и z однозначно определяют три параметра (x_0, z_0 и R_0), тогда как в реальном времени их динамика зависит от значений четырех параметров (x_0, z_0, β и γ).

Анализ уравнений (15) и (16) позволяет установить следующие свойства модели *SIR*.

Утверждение 1. При фиксированном значении основного репродуктивного числа продолжительность эпидемии возрастает при уменьшении значения коэффициента заражения β (при уменьшении значения коэффициента заболеваемости γ).

Утверждение 2. На начальной стадии эпидемии доля заболевших растет по экспоненте $x(t) = x_0 \exp(\beta t)$, где $\beta = \ln(2)/T2$, $T2$ – время удвоения выявленных на начальной стадии.

Утверждение 3. Так как $x_0 > 0$, то при любом значении основного репродуктивного числа происходит рост числа подтвержденных случаев и численности переболевших. При этом окончательная доля переболевших равна $z_* \in (x_0, 1)$. Число z_* находится из решения уравнения

$$z = g(z, x_0, z_0, R_0), \qquad (17)$$

где $g(z, x_0, z_0, R_0) =$
$= 1 - (1 - x_0)\exp[-R_0(z - z_0)]$.

Частный случай уравнения (17) при $x_0 = z_0 = 0$, т.е. уравнение $z = 1 - \exp(-R_0 z)$, называют стандартным уравнением определения финального размера эпидемии (Братусь, Новожилов и др., 2010). Решение z_* уравнения (17) при $x_0 = z_0 = 0$ определяет нижнюю границу размера эпидемии при $R_0 > 1$.

Утверждение 4. Если в начальный момент времени значение эффективного репродуктивного числа $R_e(0) = (1 - x_0)R_0 > 1$, то существует некоторый период времени, в течение которого доля инфицированных y возрастает. Этот рост происходит до тех пор, пока эффективное репродуктивное число не снизится до единицы, т.е. пока доля выявленных x не достигнет значения $x_m = 1 - 1/R_0$. При $x = x_m$ доля инфицированных достигает своего максимального значения, после чего, при $x > x_m$, она монотонно убывает. В силу соотношений (12) и (14) функция, определяющая зависимость максимальной доли инфицированных от основного репродуктивного числа, задается формулой

$$y_{\max} = \begin{cases} x_0 - z_0, \text{ если } x_0 \geq 1 - 1/R_0; \\ x_m - h(x_m, x_0, z_0, R_0), \\ \text{если } x_0 < 1 - 1/R_0, \end{cases} \qquad (18)$$

где $x_m = 1 - 1/R_0$.

Если $R_e(0) = (1 - x_0)R_0 < 1$, то доля инфицированных y все время убывает. Это свойство следует из уравнения динамики инфицированных $y'(t) = \gamma y(R_e - 1)$, которое справедливо в силу уравнений (11) и (12).

Рассмотренные свойства иллюстрируются на рис. 3. Здесь на плоскости *XU* приведены графики функций $u = h(x, x_0, z_0, R_0)$ и $u = y(x)$ при $x_0 = 20\%$, $z_0 = 0$ и при трех различных значениях R_0 ($R_0 = 0{,}9$; $R_0 = 2$ и $R_0 = 4$; сплошные линии 1, 2 и 3 и пунктирные линии 1а, 2а и 3а соответственно). На этом рисунке построена также линия $u = x$, к которой устремляются точки (x, $h(x)$) на фазовой плоскости при $t \to +\infty$.

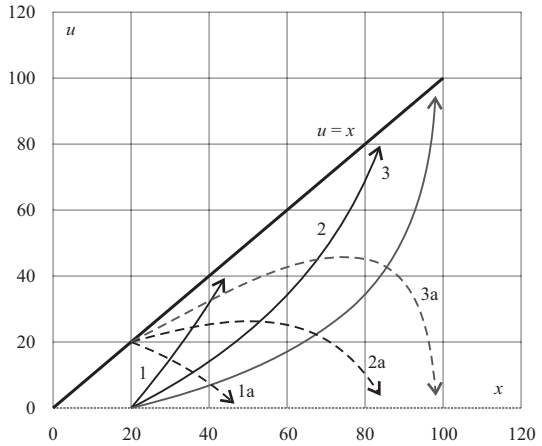

Рис. 3. Графики функций $u = h(x, x_0, z_0, R_0)$ и $u = y(x)$ при различных значениях параметров модели

Источник: расчеты авторов.

Как видим, увеличение значения параметра R_0 при фиксированной начальной доле заболевших x_0 = 20% приводит к росту конечного числа переболевших. При этом функция $u = y(x)$ при R_0 = 0,9 монотонно убывает, так как в этом случае соответствующее значение эффективного репродуктивного числа $R_e(0) = (1-0{,}2)\cdot 0{,}9 < 1$ (линия 1а). При R_0 = 2 и R_0 = 4 в начальный момент времени значения эффективного репродуктивного числа $R_e(0) = (1-x_0)R_0 > 1$. В этих случаях в начальный период доля активных больных $u = y(x)$ возрастает, но по прошествии некоторого времени достигает максимума, после чего начинает падать. Функция $u = y(x)$ принимает максимальное значение при R_0 = 2 в точке $x = x_m = 1 - 1/2 = 0{,}5$, а при R_0 = 4 – в точке $x = x_m = 1 - 1/4 = 0{,}75$. Это значит, что в случаях R_0 = 2 и R_0 = 4 снижение доли активных больных происходит после того, как доля выявленных больных превысит 50 и 75% общего числа потенциальных больных (линии 2а и 3а соответственно).

Сформулированные утверждения составляют суть *пороговой теоремы*, которая в математической эпидемиологии формулируется для различных моделей эпидемии по-разному (Нагаев, Старцев, 1968; Братусь, Новожилов и др., 2010; Hethcote, 2000; Toda, 2020; Meyers, Pourbohloul et al., 2005).

Используя принятые в нашей работе обозначения, приведем одно из утверждений пороговой теоремы для модели эпидемии *SIR* в формулировке работы (Toda, 2020): если $(1-x_0)R_0 \le 1$, то $dy/dt \le 0$ – эпидемии нет («there is no epidemic»); если же $(1-x_0)R_0 > 1$, то $dy/dt > 0$ – эпидемия есть («there is an epidemic»). В работе (Nigmatulina, 2005, p. 42) автор обращает внимание на то, что «…это устоявшееся утверждение может ввести в заблуждение (misleading)». Приведем еще одно утверждение: если $R_0 \le 1$, то «…занесенная в популяцию инфекция не превращается в эпидемию и быстро исчезает» (Братусь, Новожилов и др., 2010, с. 162).

Процитированные утверждения требуют уточнений. Из приведенных формулировок следует, что условием развития эпидемии является ситуация, при которой происходит рост доли инфицированных (активных больных). Такое формальное определение эпидемии не соответствует реальности: в течение всего лета 2020 г. и осенью вплоть до 20-х чисел сентября число активных больных в Москве (согласно статистическим данным) медленно сокращалось, но ни у кого не возникало мысли о том, что эпидемии нет.

Далее, под «вспышкой эпидемии» понимается, по-видимому, быстрый рост числа инфицированных. Однако если $x_0 \ne 0$, то условие $R_0 > 1$ является необходимым, но не достаточным условием роста числа инфицированных на начальном этапе эпидемии: как мы видели выше, доля инфицированных и в случае $1 < R_0 < 1/(1-x_0)$ сокращается монотонно (утверждение 4).

Обратимся теперь к утверждению о том, что при $R_0 \le 1$ занесенная в популяцию инфекция не превращается в эпидемию и быстро исчезает (Братусь, Новожилов и др. 2010, с. 162). Это противоречит утверждению 1, сформулированному выше: динамика процесса определяется в модели *SIR* параметрами β и γ, а не только их отношением R_0.

Для пояснения сказанного рассмотрим динамику переменных модели для двух вариантов, в которых начальные условия одни и те же (x_0 = 20%, z_0 = 0), а параметры β и γ различаются. При этом значение параметра β в первом варианте в 6 раз больше, чем во втором. На рис. 4 приведены соответствующие для этих вариантов доли выявленных больных (линии 1 и 1а), доли активных больных (линии 2 и 2а) и доли переболевших (линии 3 и 3а). В первом варианте R_0 = 2 (сплошные линии), а во втором варианте R_0 = 0,9 (пунктирные линии). На рис. 4, как и на рис. 3, при R_0 = 0,9 доля инфицированных монотонно убывает, а при R_0 = 2 существует некоторый период, когда эта доля населения возрастает.

В обоих случаях доли выявленных и доли переболевших при возрастании t монотонно приближаются к своим асимптотическим значениям. В первом варианте эпидемия развивается быстро: число переболевших в конечном итоге превышает 80% (линия 3), а число инфицированных при $t < 24$ превышает 20% (линия 2). Однако и при R_0 = 0,9 нельзя сказать, что занесенная в популяцию инфекция не превращается в эпидемию и быстро исчезает. При R_0 = 0,9 доли выявленных и переболевших хоть и медленно, но растут и в конечном итоге достигают асимптотического значения 48,1% (линии 1а и 3а). При этом число инфицированных хоть и снижается все время монотонно (линия 2а), но очень медленно, и при $t > 32$ превышает число инфицированных, соответствующих развитию эпидемии при R_0 = 2. Важно, что в обоих вариантах доля инфицированных в момент времени t = 32 находится на уровне y = 14% (точка A на рис. 4). Этот пример служит иллюстрацией утверждения 1: условия $R_0 \leq 1$ недостаточно для быстрого исчезновения инфекции; надо, чтобы и значение параметра β не было слишком малым.

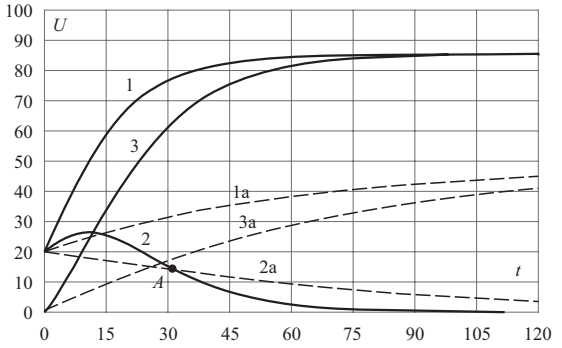

Рис. 4. Графики функций $u = x(t)$, $u = y(t)$ и $u = z(t)$ при различных значениях параметров модели

Источник: расчеты авторов.

Как видим, условие сокращения числа инфицированных ($dy/dt < 0$) не всегда характеризует отсутствие эпидемии. В этой связи обратимся к определению: «Эпидемия <…> – прогрессирующее во времени и пространстве распространение инфекционного заболевания среди людей, значительно превышающее обычно регистрируемый на данной территории уровень заболеваемости и способное стать источником чрезвычайной ситуации» (Бургасов, 1986). Из этого определения следует, что формальные условия, определяющие характер распространения инфекции, не должны ограничиваться только условием на значение основного репродуктивного числа. Приведенный выше пример (см. рис. 4) служит наглядным подтверждением этого вывода. Поэтому при уточнении формулировок пороговой теоремы в процитированных работах необходимо подчеркнуть, что в них обсуждаются варианты распространения инфекции на самой ранней стадии процесса, когда выполнены условия $0 < x_0 \ll 1$ и $z_0 = 0$. Именно о начальной стадии свидетельствует следующее утверждение: «Для многих детерминированных эпидемиологических моделей инфекция может начаться в *полностью восприимчивой популяции* (курсив наш. – *В.Л., К.Л.*) тогда и только тогда, когда $R_0 > 1$» (Hethcote, 2000, p. 601).

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ COVID-19 В РОССИИ

Несмотря на существенное упрощение реальности, агрегированная модель *SIR* и ее

модификации подходят для описания развития таких вирусных заболеваний, как корь, эпидемический паротит и оспа (Hethcote, 2000). Поэтому число работ, в которых модель *SIR* и основанные на ней модели применяются для анализа пандемии 2020 г., весьма велико и постоянно увеличивается (Chen Yi-Cheng, Lu Ping-En, 2020; Toda, 2020; Zargar, Khanday, 2020).

Излагаемая ниже модификация *SIR*-модели используется для анализа распространения COVID-19 в Москве и всех субъектах России, за исключением Москвы, на перспективу на основе официальных статистических данных, характеризующих общее число заражений, смертей и выздоровлений по дням с начала эпидемии в марте по настоящее время (Статистика COVID-19 в России, 2020). Конкретно выполнены сценарные расчеты до июля 2021 г. При выборе вариантов изменения параметров модели учитывались установленные тенденции их изменения в базовом периоде.

Официальные источники статистической информации позволяют получить следующие числовые значения: C_t – общее число заражений на день t (выявленные); R_t – общее число выздоровевших на день t; D_t – общее число смертей на день t; G_t – общее число переболевших на день t (сумма выздоровевших и умерших); I_t – число зараженных на день t (инфицированные, активные). Если число потенциальных больных N задано, то можно вычислить также S_t – число восприимчивых к болезни на день t. Здесь индекс t – порядковый номер дня ($t = 1, \ldots, T$), T – продолжительность базового периода. Ниже значение $t = 1$ соответствует 1 мая 2020 г.

Используемые числовые значения переменных при любом $t \in [1, T]$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases} G_t = R_t + D_t,\ S_t = N - C_t; \\ S_t + I_t + R_t + D_t = N; \\ I_t = C_t - G_t. \end{cases} \tag{19}$$

Ниже для оценки динамики основных количественных показателей на перспективу используется дискретная модификация модели *SIR*, в которой коэффициенты β и γ являются кусочно-постоянными функциями времени. При этом длина интервала постоянства этих функций принята равной h. Выпишем уравнения этой модели:

$$\begin{cases} C(t+h) = C(t) + h\beta(t)I(t)(1 - C(t)/N); \\ G(t+h) = G(t) + h\gamma(t)I(t), \end{cases} \tag{20}$$

где $I(t) = C(t) - G(t)$, $C(1) = C_1$, $G(1) = G_1$; N и h – положительные параметры; $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ – заданные функции (средние за h дней значения коэффициента заражения и коэффициента выздоровления соответственно); $t = 1, 1 + h, 1 + 2h, \ldots, T_F$; T_F – горизонт прогнозирования.

Если функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ не зависят от времени, то система уравнений (20) представляет собой конечно-разностную аппроксимацию системы ОДУ, которая следует из модели *SIR* (9), с шагом интегрирования h.

При выполнении конкретных расчетов по модели (20) нами было принято $h = 4$. Рассматривались и другие варианты: $h = 1, 5, 7, 10$. Результаты расчетов во всех вариантах качественно не различались. Однако выбор в пользу $h = 4$ был сделан потому, что в эпидемиологии именно $h = 4$ используется при вычислении коэффициента распространения эпидемии:

$$Rt(t) = \frac{C_t - C_{t-4}}{C_{t-4} - C_{t-8}}. \tag{21}$$

Значения функций $C(t) = C_t$ и $G(t) = G_t$, полученные из официальных источников для Москвы за период с 25 августа по 17 ноября 2020 г. с интервалом в четыре дня, т.е. при $t = 117$–201, приведены в табл. 1 (столбцы 3 и 4). В табл. 1 показаны также значения некоторых расчетных показателей, характеризующих развитие эпидемии. Так, в столбце 5 даются значения распространения, а в столбце 6 – значения коэффициента летальности $\alpha_t = 100 \times D_t/G_t$.

Эта формула следует из определения, согласно которому коэффициент летальности равен удельному весу (в %) числа умерших в общем числе переболевших данной болез-

нью за исследуемый период (Летальность, 1959). Согласно расчетам, значения этого показателя изменялись незначительно в течение последних трех месяцев как для Москвы (см. табл. 1, столбец 5), так и для всех остальных субъектов РФ. Так, средние значения коэффициента летальности в рассматриваемом периоде в Москве мало отличались от 2,11% (если вычислять коэффициент летальности по альтернативной формуле $\alpha_t = 100 \times D_t / C_t$, то соответствующие значения в рассматриваемом периоде в Москве медленно уменьшались от 1,84% 1 сентября до 1,52% 17 ноября; среднее значение – 1,71%). Поэтому динамика коэффициентов летальности для Москвы и всех остальных субъектов РФ может быть с высокой точностью аппроксимирована на основе регрессионных методов. Именно поэтому в качестве основных переменных построенной модификации *SIR*-модели мы использовали переменные $C(t)$ и $G(t)$, и, как следствие, в качестве базовой статистической информации использованы значения C_t и G_t (см. табл. 1, столбцы 3 и 4).

Если значения функций $C(t)$ и $G(t)$, вычисленные по формулам (20), известны, то значения остальных переменных вычисляются по формулам

$$\begin{cases} S(t) = N - C(t); \\ R(t) = (1 - \alpha(t))G(t); \\ D(t) = \alpha(t)G(t); \\ I(t) = C(t) - G(t). \end{cases} \tag{22}$$

Таблица 1

Показатели распространения COVID-19 в Москве осенью 2020 г.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t	Дата	C_t	G_t	α_t	$Rt(t)$	$\Delta C_h(t)$	$\Delta G_h(t)$	$R_e(t)$	$R_o(t)$	$T_I(t)$
117	25.08	258 430	211 557	2,25	0,94	652	1386	0,47	0,53	33,8
121	29.08	261 038	217 099	2,21	1,00	662	1122	0,59	0,67	39,2
125	02.09	263 684	221 586	2,19	1,01	668	1169	0,57	0,65	36,0
129	06.09	266 357	226 261	2,16	1,01	681	1240	0,55	0,62	32,3
133	10.09	269 079	231 221	2,14	1,02	679	1042	0,65	0,74	36,3
137	14.09	271 793	235 390	2,12	1,00	754	1195	0,63	0,72	30,5
141	18.09	274 808	240 169	2,10	1,11	895	1010	0,89	1,01	34,3
145	22.09	278 388	244 210	2,08	1,19	1343	1236	1,09	1,24	27,7
149	26.09	283 760	249 152	2,07	1,50	2210	1182	1,87	2,15	29,3
153	30.09	292 601	253 880	2,06	1,65	2835	1124	2,52	2,91	34,5
157	04.10	303 940	258 374	2,07	1,28	3543	1207	2,94	3,41	37,8
161	08.10	318 111	263 200	2,09	1,25	4176	1295	3,22	3,77	42,4
165	12.10	334 813	268 379	2,10	1,18	4546	1924	2,36	2,79	34,5
169	16.10	352 995	276 076	2,12	1,09	4908	1898	2,59	3,08	40,5
173	20.10	372 628	283 666	2,14	1,08	4683	2639	1,77	2,14	33,7
177	24.10	391 361	294 222	2,15	0,95	4415	3102	1,42	1,73	31,3
181	28.10	409 022	306 629	2,15	0,94	5097	3746	1,36	1,67	27,3
185	01.11	429 409	321 611	2,12	1,15	5257	3665	1,43	1,78	29,4
189	05.11	450 436	336 272	2,10	1,03	6183	3579	1,73	2,17	31,9
193	09.11	475 166	350 587	2,10	1,18	5588	3995	1,40	1,78	31,2
197	13.11	497 516	366 567	2,09	0,90	6235	4624	1,35	1,74	28,3
201	17.11	522 456	385 064	2,06	1,12	6446	4852	1,33	1,74	28,3

И с т о ч н и к: расчеты авторов по данным (Статистика коронавируса в России, 2020).

Перейдем теперь к алгоритму построения прогнозных оценок распространения COVID-19. Реализация этого алгоритма осуществлялась в два этапа. На первом для каждого $t = 1, 5, \ldots, 1 + 4(k - 1)$, где $k = [T/4]$, рассчитывались средние за четыре дня (конкретно дни t, $t + 1$, $t + 2$ и $t + 3$) значения коэффициента эффективности заражения $\beta(t)$ и коэффициента выздоровления $\gamma(t)$ в базовом периоде:

$$\beta(t) = \frac{\Delta C_h(t)}{I_t(1 - C_t / N)}; \quad \Delta C_h(t) = \frac{\tilde{N}_{t+h} - \tilde{N}_t}{h};$$

$$\gamma(t) = \frac{\Delta G_h(t)}{I_t}; \quad \Delta G_h(t) = \frac{G_{t+h} - G_t}{h}.$$

Здесь $h = 4$; $\Delta C_h(t)$ и $\Delta G_h(t)$ – средние за четыре дня значения суточных приростов подтвержденных и переболевших; $[T/4]$ – целая часть дроби $T/4$. Поэтому средние за четыре дня значения эффективного и основного репродуктивных чисел вычисляются соответственно по формулам

$$R_e(t) = \frac{\Delta C_h(t)}{\Delta G_h(t)}; \quad R_O(t) = \frac{R_e(t)}{1 - C(t) / N}.$$

На втором этапе используемого алгоритма при $t = 1 + kh$, $1 + (k + 1)\,h$, …, T_F значения функций $C(t)$ и $G(t)$ рассчитывались по формулам (20). При этом, как было отмечено ранее, значения функций $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ задавались с учетом их динамики в базовом периоде.

В табл. 1 приведены средние за четыре дня значения: ежедневного прироста подтвержденных и переболевших (столбцы 7 и 8), эффективного и основного репродуктивных чисел (столбцы 9 и 10), средней продолжительности болезни T_I (столбец 11). Согласно выполненным расчетам, функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ существенно изменялись в базовом периоде. При этом с конца августа до последней декады сентября выполнялось условие $\beta(t) < \gamma(t)$, в результате чего средние четырехдневные значения основного репродуктивного числа были меньше единицы. Весь октябрь и в первой половине ноября выполнялось условие $\beta(t) > \gamma(t)$: в этот период продолжительность болезни была больше времени, необходимого для заражения больным здорового, в результате чего средние четырехдневные значения основного репродуктивного числа достигали значения 4 и выше. В последнюю декаду октября и в начале ноября ситуация стала улучшаться: значения как основного, так и эффективного репродуктивных чисел имели тенденцию снижаться, и к 17 ноября они достигли значений 1,74 и 1,33 соответственно. Тем не менее ситуация остается по-прежнему сложной: среднее значение коэффициента распространения в период с 1 сентября по 17 ноября равно 1,13, что свидетельствует об увеличении числа новых заболевших за сутки.

На рис. 5 и 6 приведены результаты расчетов динамики COVID-19 соответственно в Москве и во всех остальных субъектах Российской Федерации в течение 420 дней (около 14 месяцев) начиная с 1 мая 2020 г. Эти расчеты были выполнены по данным на 17.11.2020 (Динамика коронавируса в Москве, 2020; Статистика коронавируса в России, 2020). На этих же рисунках значения подтвержденных случаев C_t и активных больных I_t, где $t = 1, 2, \ldots, 201$, отмечены треугольниками ($t = 1$ соответствует 1 мая 2020 г.). При выполнении прогнозных оценок при $t > 201$ рассматривались различные варианты изменения функций $\beta(t)$ и $\gamma(t)$.

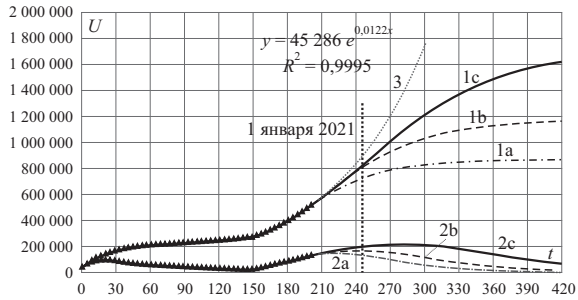

Рис. 5. Варианты динамики числа выявленных и инфицированных больных коронавирусом в Москве в течение 420 дней начиная с 1 мая 2020 г.

Источник: расчеты авторов по данным (Динамика коронавируса в Москве, 2020).

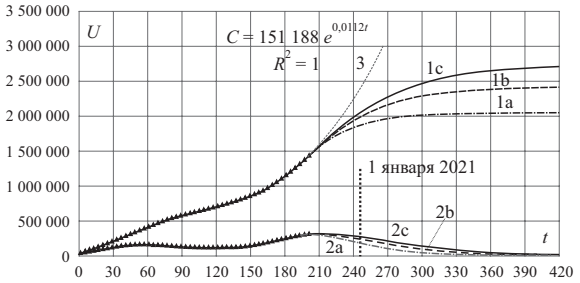

Рис. 6. Варианты динамики числа выявленных и инфицированных больных во всех субъектах РФ за исключением Москвы в течение 420 дней начиная с 1 мая 2020 г.

Источник: расчеты авторов по данным (Статистика коронавируса в России, 2020).

На рис. 5 графики функций $U = C(t)$ и $U = I(t)$ построены при трех значениях потенциального числа восприимчивых: $N = 1$ млн, $N = 1{,}5$ млн и $N = 2{,}5$ млн человек (линии 1a, 1b и 1c – графики функций $C(t)$; линии 2a, 2b и 2c – графики функций $G(t)$ соответственно). При выполнении этих расчетов значения функций $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ при $t > 201$ принимались постоянными, исходя из условий $T_I = T_I(201) = 12$, $T_C = T_C(201) = 27$. Здесь же построен экспоненциальный тренд подтвержденных больных по данным за период с 28 октября по 17 ноября. Согласно этому тренду, время удвоения числа подтвержденных больных составляет 57 дней. Согласно выполненным расчетам, если число потенциальных больных в Москве принять равным $N = 1$ млн человек, то число инфицированных (активных больных) достигнет в конце первой декады ноября максимума (около 150 тыс. человек), после чего начнет снижаться и к 1 февраля сократится до 92 тыс. человек (линия 2a). Если же число потенциальных больных в Москве принять равным $N = 2{,}5$ млн человек, то максимум числа активных больных (около 220 тыс. человек) будет достигнут в конце января ($t \approx 277$). В этом варианте расчетов число инфицированных снизится до уровня 70 тыс. человек лишь к концу июня 2021 г. ($t \approx 420$, линия 2c).

На рис. 6 приведены аналогичные результаты расчетов динамики COVID-19 для всех субъектов РФ, исключая Москву, при трех значениях потенциального числа восприимчивых: $N = 2{,}5$ млн, $N = 3{,}5$ млн и $N = 4{,}5$ млн человек (линии 1a, 1b и 1c и линии 2a, 2b и 2c соответственно). Здесь же построен экспоненциальный тренд подтвержденных больных по данным за период с 28 октября по 17 ноября, согласно которому время удвоения их числа составляет вне Москвы 62 дня. К сожалению, расчеты возможного распространения COVID-19 вне Москвы выглядели так же тревожно, как и для Москвы.

Так, для варианта, когда число потенциальных больных $N = 4{,}5$ млн человек, расчетный максимум числа инфицированных (317 тыс. человек) достигается к концу ноября ($t \approx 209$), а число инфицированных снижается до уровня 50 тыс. человек лишь к началу мая 2021 г. ($t \approx 360$, линия 2c). Смещение пика инфицированных (активных) вне Москвы на более ранние сроки по сравнению с Москвой связано с тем, что согласно выполненным оценкам в Москве значение коэффициента заболеваемости осенью 2020 г. было ниже, чем вне ее, а значения основного репродуктивного числа и там и там – примерно одинаковыми (1,7 и 1,8). Согласно расчетам, до начала лета ситуация будет оставаться тревожной, если не будет проведена массовая вакцинация населения.

Результаты расчетов, представленные на рис. 5 и 6, были получены авторами на основании статистических данных до 17 ноября 2020 г. Через два с небольшим месяца, на этапе окончательного редактирования статьи, мы решили (по согласованию с редакцией журнала) дополнить ее новыми данными. На рис. 7 построено четыре множества точек и четыре графика. Множества точек C-MSC и C-RF отражают динамику числа выявленных больных коронавирусом в Москве и во всех остальных субъектах РФ с 17 ноября 2020 г. по 23 января 2021 г., а множество точек A-MSC и A-RF – соответствующую динамику активных больных (числа инфицированных на день t) согласно официальным данным (Динамика коронави-

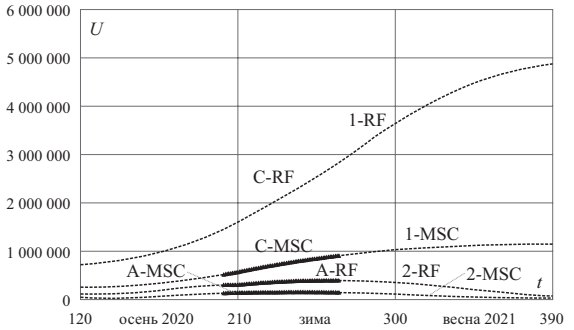

Рис. 7. Динамика числа выявленных и инфицированных больных в Москве (линии 1-MSC и 2-MSC) и во всех остальных субъектах РФ (линии 1-RF и 2-RF) с 29 августа 2020 г. по 26 мая 2021 г.

Источник: построено авторами по данным (Динамика коронавируса в Москве, 2020; Статистика коронавируса в России, 2020).

руса в Москве, 2020; Статистика коронавируса в России, 2020).

Оказалось, что реальные данные по Москве с ноября 2020 г. по январь 2021 г. с высокой точностью соответствуют сценарию *b* расчетов по модели (потенциальное число восприимчивых равно N = 1,5 млн человек). Для этого варианта отклонения расчетных значений от реальных данных составляют не более 5%. Описанное выше иллюстрирует рис. 7: графики построенных функций $U = C(t)$ и $U = I(t)$ для Москвы при значении N = 1,5 млн человек (линии 1-MSC и 2-MSC) проходят вблизи точек множеств C-MSC и A-MSC (этим графикам соответствуют линии 1b и 2b на рис. 5).

Что касается реальных данных и расчетов по модели для остальных субъектов России, то выполненные в ноябре прогнозные оценки оказались «оптимистическими»: все теоретические кривые, рассмотренные на рис. 6, лежат существенно ниже соответствующих статистических точек C-RF и A-RF на рис. 7. Так, число выявленных больных коронавирусом вне Москвы, равное 2,5 млн человек, должно было быть достигнуто (согласно худшему варианту из трех рассмотренных, когда потенциальное число восприимчивых равно N = 4,5 млн человек) в начале марта 2021 г. (при $t \approx 310$, рис. 6). Однако в реальности этот рубеж был преодолен почти на два месяца раньше, 8 января (при $t \approx 253$, рис. 7). Отметим также, что в реальности максимальное число инфицированных на 23.01.2021, равное 413 тыс. человек, приходится на вторую неделю января ($t \approx 256$), а не на конец ноября 2020 г. (см. рис. 6).

Используя новые данные, мы скорректировали значения параметров модели так, чтобы расчеты с высокой степенью точности соответствовали реальным значениям, характеризующим развитие эпидемии во всех субъектах РФ, кроме Москвы. Оказалось, что хорошее соответствие достигается при значении N = 8,2 млн человек; при этом используемые параметры $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ изменяются во времени так, что основное репродуктивное число принимает значения в диапазоне от 1,3 до 1,9. На рис. 7 приведены соответствующие графики функций $U = C(t)$ и $U = I(t)$, которые проходят вблизи точек множеств C-RF и A-RF (линии 1-RF и 2-RF на рис. 7). Как видим, общее число переболевших коронавирусом в России к лету 2021 г. может превысить 6 млн человек.

Таким образом, из модельных расчетов следует, что как в Москве, так и вне ее ситуация с коронавирусом будет оставаться напряженной по крайней мере до начала лета. Несмотря на то что число активных больных будет снижаться, до середины весны 2021 г. это снижение будет несущественным. При расчетах не учитывался существеннейший фактор: вакцинация населения. Включение в модель этого фактора приведет к более оптимистичным оценкам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обсуждается подход к оценке влияния эпидемии COVID-19 в России на экономическую эффективность и, как следствие, на денежные доходы населения. Построена

динамическая модель влияния ограничительных мер, направленных на снижение распространения инфекции, на макроэкономическую эффективность. Для оценки динамики ключевых параметров, характеризующих распространение инфекции и влияющих на параметры вводимых ограничительных мер, использована модификация классической *SIR*-модели эпидемии. Построенная модификация *SIR*-модели опирается на официальную статистическую информацию. Модель допускает ее уточнение, связанное с учетом влияния вакцинации населения на динамику эпидемиологического процесса. Использованный подход позволяет получить приближенную оценку влияния эпидемии COVID-19 на денежные доходы населения РФ.

Спиок литературы / References

Аганбегян А.Г. (2020). Академик Аганбегян оценил влияние пандемии на доходы населения // Российская газета. 23.04.2020. [Aganbegyan A.G. (2020). Academician Aganbegyan assessed the impact of the pandemic on the population's income. *Rossiyskaya Gazeta*, 23.04. (in Russian).] URL: https://rg.ru/2020/04/23/akademik-aganbegian-ocenil-vliianie-pandemii-na-dohody-naseleniia.html

Андерсон Р., Мэй Р. (2004). Инфекционные болезни человека. Динамика и контроль: пер. с англ. М.: Мир: Научный мир. 784 с. [Anderson R., May R. (1991). Infection Diseases of Humans: Dynamics and Control. New York, Oxford University Press. 784 p. (in Russian).]

Бароян О.В., Рвачев Л.А., Иванников Ю.Г. (1977). Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа для территории СССР. М.: ИЭМ им. Н.Ф. Гамалеи. 546 с. [Baroyan O.V., Rvachev L.A., Ivannikov Yu.G. (1977). Modeling and forecasting of influenza epidemics for the territory of the USSR. Moscow, N.F. Gamalei IEM. 546 p. (in Russian).]

Белоусов Д. (2020). Об особенностях прогноза социально-экономического развития в условиях кризисной неопределенности. Доклад на Ученом совете ИНП РАН 17 марта 2020 г. [Belousov D. (2020). On the features of the forecast of socio-economic development in the conditions of crisis uncertainty. Report at the Scientific Council of the IEF RAS on March 17, 2020 (in Russian).] URL: http://www.forecast.ru/_ARCHIVE/Presentations/DBelousov/2020-06-17INPRAN.pdf

Белоусов Д.Р., Сальников В.А., Солнцев О.Г., Пенухина Е.А., Михайленко К.В., Шабанова Ю.Р., Апокин А.Ю. (2020). О среднесрочном прогнозе развития российской экономики в условиях пандемии коронавируса и возможного кризиса мировой экономики. [Belousov D.R., Salnikov V.A., Solntsev O.G., Penukhina E.A., Mikhailenko K.V., Shabanova Yu.R., Apokin A.Yu. (2020). On the medium-term forecast of the development of the Russian economy in the context of the coronavirus pandemic and the possible crisis of the world economy. (in Russian).] 31.05.2020. URL: http://www.forecast.ru/Forecast/fore052020.pdf

Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. (2010). Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит. 436 с. [Bratus A.S., Novozhilov A.S., Platonov A.P. (2010). Dynamical systems and models of biology. Moscow, Fizmatlit, 436 p. (in Russian).]

Бургасов П.Н., Сумароков А.А. (1986). Эпидемия. Большая медицинская энциклопедия: в 30 т. / гл. ред. Б.В. Петровский. 3-е изд. М.: Советская энциклопедия. Т. 28. С. 544. [Burgasov P.N., Sumarokov A.A. (1986). An epidemic. Big medical encyclopedia: in 30 v. Chief editor B.V. Petrovsky. 3rd ed. Moscow, Sovetskaya enciklopediya, vol. 28, p. 544 (in Russian).]

Летальность (1958). Малая Советская Энциклопедия, 3-е изд. / гл. ред. Б.А. Введенский. М.: Большая советская энциклопедия. 1958–1961 гг. Т. 5. С. 523. [Lethality (1958). Small Soviet Encyclopedia, 3rd ed. Chief editor B.A. Vvedensky. Moscow: Great Soviet Encyclopedia. 1958–1961, vol. 5, p. 523 (in Russian).]

Экономика (2020). Экономика: факты, оценки, комментарии (сентябрь 2020 г.) Материалы Банка России. Информационно-аналитический комментарий 28 октября 2020 г. [Economics: Facts,

Estimates, comments (September 2020) Materials of the Bank of Russia. *Information and analytical commentary* on October 28, 2020 (in Russian).] URL: https://www.cbr.ru/Collection/Collection/File/29390/EC_2020-09.pdf

Нагаев А.В., Старцев А.В. (1968). Пороговая теорема для одной модели эпидемии // Матем. заметки. Т. 3. № 2. С. 179–185. [Nagaev A.V., Startsev A.V. (1968). The threshold theorem for one model of the epidemic. *Mat. Notes*, vol. 3, no. 2, pp. 179–185 (in Russian).]

Прогноз (2020). Прогноз социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2024 года. [Forecast (2020). Forecast of socio-economic development of the Russian Federation for the period up to 2024 (in Russian).] URL: http://economy.gov.ru/minec/activity/sections/macro/prognoz/2019093005

Росстат-1. Федеральная служба государственной статистики (Росстат). Главная страница. Статистика. Официальная статистика. Население. Уровень жизни. [Rosstat-1. Federal State Statistics Service (Rosstat). Home page. Statistics. By the official statistics. Population. Standard of living (in Russian)] URL: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/population/urov/urov_11kv.htm

Росстат-2. Федеральная служба государственной статистики (Росстат). Главная страница. Статистика. Официальная статистика. Национальные счета. Валовой внутренний продукт. [Rosstat-2. Federal State Statistics Service (Rosstat). Home page. Statistics. By the official statistics. National accounts. Gross domestic product (in Russian)] URL: https://rosstat.gov.ru/free_doc/new_site/vvp/vvp-god/tab25.htm

Статистика коронавируса в России (2020). [Coronavirus statistics in Russia (2020). (in Russian).] URL: https://russian-trade.com/coronavirus-russia/

Bernoulli D. (1760). Essai d'une nouvelle analyse de la mortalite causee par la petite verole et des avantages de l'inoculation pour la prevenir. Mem. *Math. Phys. Acad. Roy. Sci*. (Paris), 1–45. Histoire de l'Academie Royale des Sciences, 1766. (Reprinted in: Haberman S., Sibbett T.A. (1995). (ed.). *History of Actuarial Science*, vol. VIII. Multiple Decrement and Multiple State Models. London, William Pickering, p. 1.)

Chen Yi-Cheng, Lu Ping-En. (2020). A Time-dependent SIR model for COVID-19 with Undetectable Infected Persons / arXiv:2003.00122v6 [q-bio.PE] 28 Apr 2020. URL: https://arxiv.org/pdf/2003.00122.pdf

Diekmann O., Heesterbeek J.A.P. (2000). Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation. Chichester: John Wiley, p. 303.

Dietz K., Heesterbeek J.A.P. (2002). Daniel Bernoulli's epidemiological model revisited. *Mathematical Biosciences*, no. 180, pp. 1–21. URL: http://www.medicine.mcgill.ca/epidemiology/hanley/bios601/competingRisks/DanielBernoulli.pdf

Hethcote H.W. (2000).The mathematics of infectious diseases. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. *SIAM Review*, no. 42 (4), pp. 599–653. URL: https://www.maths.usyd.edu.au/u/marym/populations/hethcote.pdf

Kermack W.O., McKendrick A.G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. of the Royal Society*, *ser. A.V. 115*, no. A771, pp. 700–721. URL: https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1927.0118

Meyers L.A., Pourbohloul B., Newman M.E. et al. (2005). Network theory and SARS: predicting outbreak diversity. *Journal of Theoretical Biology*, vol. 232 (1), pp. 71–81. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022519304003510

Nigmatulina K. (2005). Modeling and responding to pandemic influenza: Importance of population distributional attributes and non-pharmaceutical interventions. *B.S.E Operations Research Financial Engineering*. Princeton University, p. 265. URL: https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/53298

Toda A.A. (2020). Susceptible-infected-recovered (SIR) dynamics of COVID-19 and economic impact. Cornell University, March 25, 2020. URL: https://arxiv.org/pdf/2003.11221.pdf

Zargar F.A., Khanday M.A. (2020). Mathematical analysis on the dynamics of COVID-19 in India using SIR Epidemic Model. *Mapana Journal of Sciences*, vol. 19, no. 3. URL: http://journals.christuniversity.in/index.php/mapana/article/view/2537

Рукопись поступила в редакцию 21.11.2020 г.

ON ASSESSING THE IMPACT OF CORONAVIRUS EPIDEMIC IN RUSSIA ON POPULATION INCOMES

V.V. Lebedev, K.V. Lebedev

DOI: 10.33293/1609-1442-2021-1(92)-116-133

Valery V. Lebedev, Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; lebedev.guu@gmail.com
Konstantin V. Lebedev, Institute of Regional Development and Analysis of the Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education "Academy of the Ministry of Education of Russia", Moscow, Russia; k.lebedev@eit.edu.ru

Acknowledgment. The work was accomplished with financial support of Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-010-00921).

The paper discusses an approach to assessing the impact of the coronavirus epidemic in Russia on economic efficiency and, as a result, on the monetary income of the country's population. The approach used is based on the application of the methodology of mathematical modeling. Based on the analysis of statistical information, it is shown that there is a correlation between the dynamics of the average per capita income of the population and GDP. To assess the dynamics of GDP, a dynamic model of the impact of restrictive measures aimed at curbing the spread of the coronavirus epidemic on macroeconomic efficiency is constructed. The main hypothesis of the model is that the main factor affecting the efficiency of the economy is the productivity of workers who create GDP. In the constructed model, all employees are divided into three groups. The first group – workers whose activities were not affected by the coronavirus; the second group-workers whose productivity decreased due to the coronavirus; the third group-workers whose productivity fully or partially recovered after the easing of restrictive measures. As a result, the dynamics of GDP is determined by a system of three ordinary differential equations with parameters depended on the epidemiological situation. To assess the indicators that characterize the spread of infection and affect the parameters of the macroeconomic efficiency model, a discrete modification of the classical SIR-model of the epidemic with piecewise constant parameters is constructed. This model allowed us to estimate the dynamics of the average for the four day values of the basic reproductive numbers and other indicators of spread of infection through the use of official statistical information in the base period, and to perform scenario calculations for the development of the epidemic in Moscow and beyond until July 2021 Developed modification of the SIR model allows for its clarification with regard to the influence of vaccination on the dynamics of epidemiological process.
Keywords: average per capita monetary income, GDP dynamics, coronavirus epidemic, economic efficiency, mathematical modeling.
JEL classification: C02, C31, C32.

Manuscript received 21.11.2020